# Задачи (многочлен Чебышева)

Дана функция

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

заданная на $[-1, 1]$.

1. Доказать, что $T_n(x)$ – полином степени $n$, удовлетворяющий рекуррентному сотношению

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

2. Дана последовательность

$$x_k = x_0 T_k(z).$$

   Найти рекуррентное соотношение для $x_k$.

3. Доказать, что $\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$ и при $n > 0$, $T_n(x)$ принимает значение $-1$ ровно $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ раз, и значение 1 ровно $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (в сумме $n+1$).

4. Доказать, что старший коэффициент $T_n(x)$ равняется $2^n$.

5. Доказать, что среди многочленов степени $n$ со старшим коэффициентом 1 многочлен $\frac{1}{2^n}T_n(x)$ минимизирует максимальное отклониение от нуля на отрезке $[-1, 1]$, то есть для любого многочлена $P$ степени $n - 1$

$$\max_{x\in[-1,1]} |x^n + P(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{2^n} T_n(x) \right|$$

6. Найти многочлен со старшим коэффициентом 1, имеющий наименьшее отклонение на $[a, b]$ (выразить через $T_n(x)$).

7. Найти многочлен $P_k(x)$ с младшим коэффициентом 1, имеющим наименьшее отклонение на $[a, b]$ при $0 < a < b$.

8. Найти рекуррентное соотношение для $P_k(x)$.