Личное домашнее задание

Во всех следующих задачах предполагается использовать лемму Бернсайда.

Лемма 1. *Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X. Тогда справедливо равенство*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}(g)|.$$

Напомню, что X/G это обозначения для множества орбит, а $\operatorname{Fix}(g)$ — для множества неподвижных точек при действии элементом g.

Замечание. Число орбит, и, следовательно выражение в правой части однозначно определяется образом G в группе S_X.

Лемма Бернсайда подходит для подсчёта числа раскрасок каких-нибудь объектов с точностью до действия группы преобразования этих объектов. На паре было сделано следующее замечание:

Замечание. Пусть группа G действует на множестве X. Пусть имеется n цветов и элемент $g \in G$. Тогда количество раскрасок в n цветов, которые остаются неподвижными под действием элемента g есть $n^{c(g)}$, где $c(g)$ есть количество независимых циклов, на которые раскладывается перестановка, заданная элементом g.

1. Задания

Задание 1. (Бартош Григорий)
Рассмотрим октаэдр (как октаэдр связан с кубом?). Сколько существует раскрасок вершин октаэдра в n цветов с точностью до его вращений?

Задание 2. (Варфоломеев Александр)
Посчитайте количество неизоморфных графов на 6-ти вершинах. (Группа S_6 действует на парах различных элементов, которые красятся в 2 цвета).

Задание 3. (Егоров Владимир)
Посчитайте, сколько существует различных, с точность до поворотов, раскрасок вершин правильного 12-ти угольника в n цветов, так чтобы в первый цвет было покрашено ровно 4 вершины.

Задание 4. (Ермилов Антон)
Рассмотрим кубик в $\mathbb{R}^3$ кубик со стороною 2. Его грани разбиты на квадратики 1×1. Сколько существует (с точностью до вращений куба) раскрасок этих квадратиков в 6 цветов, так, чтобы в каждый цвет было покрашено 4 квадратика? (Сколько способов покрасить кубик Рубика $2 \times 2 \times 2$).

Задание 5. (Крючков Максим)
Рассмотрим квадрат 5×5 разбитый на маленькие квадратики 1×1. Сколько существует различных раскрасок маленьких квадратов в n цветов с точностью до самосовмещений большого квадрата?

Задание 6. (Никифоровская Анна)
Рассмотрим правильный n-угольник. Сколько существует (с точностью до поворотов) раскрасок его вершин в k цветов?

Задание 7. (Правилов Михаил)
Рассмотрим куб в $\mathbb{R}^3$. Сколько существует раскрасок рёбер куба в n цветов, так, чтобы в первый цвет было покрашено ровно 2 ребра (с точностью до поворотов)?

Задание 8. (Саютин Дмитрий)
Рассмотрим квадрат $p \times p$, где p-простое. Он разбит на квадратики 1×1, которые красятся в 2 различных цвета. Скажем, что две раскраски маленьких квадратиков эквивалентны, если они связаны цепочкой преобразований следующего вида: можно во всех одновременно столбцах сдвинуть цвета по циклу; можно сдвинуть цвета во всех строках по циклу; можно повернуть весь квадрат на 90 градусов. Найдите количество неэквивалентных раскрасок.

Задание 9. (Федотов Александр)
Рассмотрим правильный шестиугольник. И разобьём его на 24 правильных треугольника (сначала длинными диагоналями на 6 треугольников, а потом каждый из них ещё на 4). Сколько существует раскрасок этих треугольников в n цветов с точностью до всех самосовмещений шестиугольника?

Задание 10. (Чернышов Георгий)
Посчитайте количество триангуляций правильного 60-угольника с помощью его диагоналей с точностью до вращений 60-угольника. (Не забудьте про числа Каталана)

Задание 11. (Швецова Анна)
Дан правильный шестиугольник. Сколько существует различных раскрасок его диагоналей в n цветов с точностью до всех самосовмещений шестиугольника (рёбра не красим)?