1 Домашнее задание

1.1 (1,5 балла)**.** Рассмотрим невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел

$$\deg(x_1) \geqslant \deg(x_2) \geqslant \ldots \geqslant \deg(x_n) \geqslant 0.$$

Доказать, что такая последовательность является степенной последовательностью некоторого графа G без петель тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число и выполняется неравенство

$$d_1 \leqslant d_2 + d_3 + \ldots + d_n.$$

1.2 (1.5 балла)**.** Доказать, что последовательность

$$(n, n, n-1, n-1, \ldots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

всегда является графовой.

1.3 (1.5 балла)**.** Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{outdeg}(x) - \operatorname{indeg}(x)| \leqslant 1.$$

Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить направленный сбалансированный орграф D.

1.4 (1,5 балла)**.** Пусть G есть граф, вершины которого помечены битовыми строками длины $k \geqslant 1$. Вершины x и y в таком графе являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им битовые строки отличаются ровно в двух позициях. Определить количество связных компонент в таком графе.

1.5 (1 балл)**.** Доказать, что связный граф G, минимальная степень $\delta(G)$ которого больше или равна $n/2$, является связным. Показать, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф с $\delta(G) = n/2 - 1$.

1.6 (2,5 балла)**.** Доказать, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.

1.7 (1,5 балла)**.** Пусть G есть произвольный простой несвязный граф. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ всегда является связным графом. Чему равен диаметр графа $\bar{G}$?

1.8 (2 балла)**.** Пусть G есть граф с обхватом $g(G) \geqslant 5$ и минимальной степенью вершины $\delta \geqslant k$. Доказать, что в таком графе по меньшей мере $k^2 + 1$ вершин. Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ предъявить графы, имеющие в точности $k^2 + 1$ вершин.

1.9 (1,5 балла)**.** Пусть G есть граф, построенный на $n \geqslant 2$ вершинах, $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ есть минимальная и максимальная степени вершин в графе G. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

a) удаление вершины степени $\Delta(G)$ не может увеличить среднюю степень вершин в графе;

b) удаление вершины степени $\delta(G)$ не может уменьшить среднюю степень вершин в графе.

1.10 (1,5 балла)**.** Доказать, что любая вершина в простом связном графе G, построенном на $n \geqslant 3$ вершинах и отличном от K_n, принадлежит некоторому индуцированному подграфу P_3.

1.11 (1,5 балла). Пусть вершина x есть точка сочленения графа G. Показать, что граф $\bar{G} - x$ является связным.

1.12 (2 балла). Доказать, что любой 3-регулярный граф G имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда в нем содержится мост.

1.13 (2,5 балла). Пусть G есть простой граф, построенный на 10 вершинах и имеющий 38 ребер. Доказать, что G содержит K_4 в качестве своего индуцированного подграфа.