7 Домашнее задание

7.1 (1 балл)**.** Известно, что экспоненциальные производящие функции $F(z)$ и $G(z)$ для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно связаны соотношением $G(z) = F(z)/(1-z)$. Выразить b_n через a_n.

7.2 (1 балл)**.** Рассмотрим следующие обыкновенные производящие фукнции:

$$g(z) = 1 - z - 6z^2, \qquad\qquad h(z) = 1 + 3z.$$

Получить явный вид коэффициентов f_n производящей функции $f(z)$, связанной с $g(z)$ и $h(z)$ равенством

$$f(z) \cdot g(z) = h(z).$$

7.3 (1 балл)**.** Выразить через обыкновенную производящую функцию $g(z) = 1-z$ производящие функции для числовых последовательностей

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4 \ldots;$$

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots.$$

7.4 (1 балл)**.** Определить производящую функцию $f(z)$ для чисел Фибоначчи. Получить с ее помощью явные выражения для чисел Фибоначчи.

7.5 (1,5 балла)**.** Решить с помощью обыкновенных производящих функций следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2^n, && a_0 = 0; \\ a_{n+2} &= 5a_{n+1} - 6a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6; \\ a_{n+2} &= -2a_{n+1} - a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6. \end{aligned}$$

Замечание 7.1. Последние два рекуррентных соотношения были заданы в предыдущем домашнем задании. Для тех, кто их не решил, решить их параллельно методом, описанным в параграфе 5 конспекта.

7.6 (1 балл)**.** Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\, a_{n+1} - 4\, a_n + 3 \cdot 2^n$$

с помощью обыкновенных производящих функций.

Замечание 7.2. Данное рекуррентное соотношение было задано в предыдущем домашнем задании. Для тех, кто его не решил, решить его параллельно методом, описанным в параграфе 5 конспекта.

7.7 (1,5 балла)**.** Доказать формулу

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) (\alpha\, z)^n. \tag{1}$$

Указание. Для проверки этой формулы следует, вообще говоря, показать, что умножение стоящего в правой части равенства (1) ряда $f(z)$ на ряд $g(z) = (1-\alpha z)^k$ дает единицу для любого

$k \in \mathbb{N}$. Однако проще всего доказать эту формулу, воспользовавшись отмеченной в лекциях связью между формальными степенными рядами и рядами из математического анализа.

Действительно, рассмотрим пару функций

$$f(z) = \frac{1}{(1-\alpha z)^k} \qquad \text{и} \qquad g(z) = (1-\alpha z)^k.$$

В области $|\alpha z| < 1$ справедливо равенство

$$f(z) \cdot g(z) = 1.$$

Все, что теперь осталось для доказательства тождества (1) — это разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в области $|\alpha z| < 1$. Для этого следует записать формулу бинома Ньютона

$$(1+z)^q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(q)_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-n+1)}{n\,(n-1)\,\ldots\,1} z^n,$$

справедливую для любого $q \in \mathbb{C}$ и $|z| < 1$, положить в ней в качестве $q = -k$, $k \in \mathbb{N}$, и заменить z на αz.

7.8 (1 балл)**.** Решите с помощью обыкновенных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, && a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \\ &a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, && a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

Указание. Для получения явного выражения для a_n воспользоваться формулой (1).

7.9 (1 балл)**.** Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n$$

с помощью обыкновенных производящих функций.

Замечание 7.3. Данное рекуррентное соотношение было задано в предыдущем домашнем задании. Для тех, кто его не решил, решить его параллельно методом, описанным в параграфе 5 конспекта.

Указание. Для получения явного выражения для a_n воспользоваться формулой (1).