Содержание



# 1 Билинейные и квадратичные формы

Раннее было понятие полилинейного отображения ($m$-формы). В случае $m = 2$ получаем 2-форму, которую принято называть билинейной формой. **Примеры**:

1. скалярное произведение,

2. Функция $\alpha(f,g) = \int_a^b fg$ — билинейная форма на $C[a,b]$.

3. $\det(XY), X, Y \in K^2$.

Пусть $K$ поле с инволюцией, а именно пусть задан эндоморфизм $i : K \longrightarrow K$ такой, что $i^2 = \mathrm{id}$. Будем обозначать $\bar{a} = i(a)$.

**Примеры**: В качестве $i$ можно рассматривать тождественный автоморфизм. В случае $K = \mathbb{C}$ кроме тождественного имеется только один автоморфизм — комплексное сопряжение.

**Определение 1** *Форма $\alpha : V \times V \longrightarrow K$ называется полуторалинейной, если*

$$\alpha(x_1 + x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \alpha(x_2, y)$$
$$\alpha(\lambda x, y) = \bar{\lambda}\alpha(x, y).$$

Пусть

- $V$ — конечномерное векторное пространство.
- $\alpha : V \times V \longrightarrow K$ — билинейная или полуторалинейная форма.
- $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства $V$.

Тогда для векторов $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^n y^i e_i$ выполнено $\sigma(x,y) = \sum \overline{x}^i y^j \alpha(e_i, e_j)$. Таким образом, $\alpha$ определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(e_1,e_1) & \alpha(e_1,e_2) & \ldots & \alpha(e_1,e_n) \\ \alpha(e_2,e_1) & \alpha(e_2,e_2) & \ldots & \alpha(e_2,e_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha(e_n,e_1) & \alpha(e_n,e_2) & \ldots & \alpha(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

и

$$\alpha(x,y) = \bar{X}^T A Y.$$

Изучим как изменится матрица билинейной формы при переходе к другому базису.

Пусть $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, тогда $X = CX'$, $Y = CY'$ и, значит

$$A' = \overline{C}^T AC. \tag{1}$$

**Определение 2**

- *Ядро билинейной формы* $\operatorname{Ker}\alpha = \{y \in V | \alpha(x,y) = 0, \forall x \in V\}$
- *Форма $\alpha$ называется невырожденной, если* $\operatorname{Ker}\alpha = 0$.
- *Рангом билинейной формы будем называть ранг ее матрицы. (он не зависит от выбора базиса, т.к. домножение матрицы на обратимую не меняет ее ранг)*
- *симметричная и антисимметричная*

### 1.1 Ортогональное дополнение.

Будем предполагать, что пространство $V$ конечномерно. Пусть $\alpha$ — симметрическая или антисимметрическая билинейная форма над полем $K$ и $\operatorname{char} K \neq 2$.

**Определение 3** • *Векторы $x$ и $y$ ортогональны ($x \perp y$), если $\alpha(x, y) = 0$.*

- *Ортогональным дополнением к подпространству $U$ называется $U^\perp = \{v \in V | v \perp u \ \forall u \in U\}$.*

**Замечание 1** *Заметим, что*

1. *$U^\perp$ — векторное подпространство.*
2. *$V^\perp = \operatorname{Ker} \alpha$.*
3. *Если $e_1, \dots, e_m$ — базис $U$, то $v \in U^\perp \Longleftrightarrow v \perp e_i \, \forall i = 1..m$.*
4. *$\dim \operatorname{Ker} \alpha = \dim V - \operatorname{rk} A$.*
5. *Ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса.*
6. *$\alpha$ — невырождена тогда и только тогда, когда строки $A$ линейно независимы.*

**Лемма 1** *Если $\alpha$ — невырождена и $U \leqslant V$, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U^{\perp\perp} = U$.*

**Доказательство**(см. [3]) Выберем базис $e_1, \dots, e_m$ пространства $U$ и дополним его до базиса всего пространства. Подпространство $U^\perp = \{y | \alpha(e_i, y) = 0, \, i = 1..m\}$ задается системой линейной уравнений, матрица которой состоит из первых $m$ строк матрицы $A$, т.е. имеет ранг $m$, т.к. $A$ невырождена.

Далее, ясно, что $U \subseteq U^{\perp\perp}$ и $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$. □

**Замечание 2** *Второе утверждение леммы перестает быть верным в бесконечномерном случае.*

**Лемма 2** *$V = U \oplus U^\perp$ тогда и только тогда, когда $\alpha|_U$ невырождена.*

**Доказательство**(см. [3]) Как и в доказательстве предыдущей леммы, получаем, что $\dim U^\perp \geqslant \dim V - \dim U$. С другой стороны,

$$U \cap U^\perp = \operatorname{Ker} \alpha|_U,$$

а, значит, если $U \cap U^\perp = 0$, то $\alpha|_U$ невырождена. Обратно, если $\alpha|_U$ невырождена, то $U \cap U^\perp = 0$ и $\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp \geqslant \dim V$, а, значит, $U + U^\perp = V$. □

**Определение 4** *Полуторалинейная форма называется эрмитовой, если* $\alpha(x,y) = \overline{\alpha(y,x)}$.

**Замечание 3** *Билинейная форма является симметричной тогда и только тогда, когда ее матрица $A$ удовлетворяет условию $A^T = A$. Полуторалинейная форма является эрмитовой тогда и только тогда, когда $\overline{A}^T = A$.*

Чтобы избежать путаницы эрмитовы формы будут рассмотрены в отдельном параграфе.

### 1.2 ортогональный базис

**Предложение 1** *Для любой симметричной билинейной формы существует ортогональный базис.*

**Доказательство**(см. [3, стр 196]) Индукция по $\dim V$. Если $\alpha = 0$, то ок. Заметим, что

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha(x+y,x+y) - \alpha(x,x) - \alpha(y,y)).$$

Поэтому если $\alpha \neq 0$, то найдется $e_1 \in V$ такой, что $\alpha(e_1,e_1) \neq 0$, а значит $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$. Далее по индукции. □

#### 1.2.1 ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть

- $e_1, \ldots, e_n$ — базис $V$,
- $V_k = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$.
- $A_k$ — матрица ограничения $\alpha$ на $V_k$.
- $\delta_k = \det A_k$ — угловой минор порядка $k$ матрицы $A$. $V_0 := 0$, $\delta_0 := 1$.

**Теорема 1** *Если все угловые миноры $\delta_1, \ldots, \delta_n$ матрицы $A$ отличны от нуля, то существует единственный ортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$ пространства $V$, удовлетворяющий условиям*

$$f_k \in e_k + V_{k-1}, \qquad (k = 1..n).$$

*При этом*

$$\sigma(f_k) = \alpha(f_k, f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$$

**Доказательство:** ([3])

Индукция по $n$. При $n = 1$ положим $f_1 = e_1$. Пусть $n > 1$. Построим базис $f_1, \ldots, f_{n-1}$ пространства $V_{n-1}$, удовлетворяющий условиям теоремы. Будем искать $f_n$

$$f_n = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i.$$

Из $\alpha(f_n, f_i) = 0$ получаем $\lambda_i = -\frac{\alpha(e_n, f_i)}{\alpha(f_i, f_i)}$. $f_n \notin V_{n-1}$, поэтому $f_1, \ldots, f_n$ — базис пространства $V$. Найдем $\alpha(f_n, f_n)$. Матрица перехода от $e_1, \ldots, e_n$ к $f_1, \ldots, f_n$ верхнетреугольная с единицами на диагонали, поэтому определители матриц формы $\alpha$ в этих базисах совпадают, а значит $\delta_n = \prod \alpha(f_i, f_i) = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \ldots \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \alpha(f_n, f_n)$. Получаем $\alpha(f_n, f_n) = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

$\square$

### 1.3 Квадратичные формы

**Определение 5** *Пусть $\alpha$ — симметричная билинейная форма над $K$ и* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Функция*

$$q : V \longrightarrow K,$$
$$x \mapsto \alpha(x, x)$$

*называется квадратичной формой, ассоциированной с $\alpha$.*
*квадратичная форма*
*поляризация*

Обратно симметричная билинейная форма восстанавливается по формуле

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma(x + y) - \sigma(x) - \sigma(y)).$$

Последняя формула задает биекцию между множеством симметричных билинейных форм и множеством квадратичных форм. [3, 198]

**Нормальный вид** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис $V$. Нормируя векторы $e_i$, значения $q(e_i)$ можно умножать на любые ненулевые квадраты. Это означает следующее

**Лемма 3** 1. *Если $K = \mathbb{C}$, то существует базис, в котором форма $q$ принимает нормальный вид*

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2.$$

*Причем $r = \operatorname{rk} q$.*

2. *Если $K = \mathbb{R}$, то существует базис, в котором форма $q$ принимает нормальный вид*

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2.$$

*Причем* $k + l = \operatorname{rk} q$

**Пример.** Рассмотрим квадратичную форму

$$q(x, y, z) = x^2 + xy - y^2 - 3yz.$$

Преобразуем $q(x, y, z) = x^2 + xy - y^2 - 3yz = (x + \frac{y}{2})^2 - \frac{5y^2}{4} - 3yz = \ldots$

**Определение 6** *Вещественная квадратичная форма(соотв. вещественная симметричная билинейная форма) $q$ положительно определена, если $q(x) > 0$ при $x \neq 0$.*

Пример: скалярное произведение.

Нормальный вид положительно определенной квадратичной формы $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

**Теорема 2** *Число $k$ в нормальном виде произвольной вещественной квадратичной формы есть максимальная размерность подпространства, на котором форма положительно определена. Число $l$ есть максимальная размерность подпространства, на котором форма отрицательно определена.*

**Доказательство.**(см. [3, гл. V §3 теорема 3])Пусть $m$ — максимальная размерность подпространства, на котором форма положительно определена. Ясно, что $k \leqslant m$ т.к. $q$ положительно определена на подпространстве $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. Для всякого подпространства $U$, на котором форма $q$ положительно определена выполнено $U \cap \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle = 0$, т.к. $q(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. А значит $\dim U \leqslant k$. $\square$

**Следствие 1** *(закон инерции). Числа $k$ и $l$ в нормальном виде вещественной квадратичной формы не зависят от выбора базиса, в котором эта форма имеет нормальный вид.*

**Определение 7** *Пара $(k, l)$ называется сигнатурой формы $q$.*

**Пример.** Из теоремы 1 следует.

**Теорема 3** *(теорема Якоби) Если все угловые миноры $\delta_k$ матрицы вещественной квадратичной формы отличны от нуля, то отрицательный индекс инерции равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.*

**Следствие 2** *(критерий Сильвестра). Вещественная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.*

### 1.3.1 отступление: о поверхностях второго порядка.

Цель этого параграфа - демонстрация некоторого применения изложенной выше теории квадратичных форм на практике. На данный момент мы уже можем, например, выносить некоторые суждения о виде поверхности второго порядка. В этом параграфе будем рассматривать любые замены базиса, хотя (как будет видно позднее) зачастую разумно рассматривать только определенные типы преобразований и выбирать исключительно ортонормированный базис. Однако, последнее требует изучения квадратичных форм в евклидовом пространстве, которое будет рассмотрено чуть позже.

**Общие рассуждения.** Пусть $V$ — $n$-мерное векторное пространство. Зафиксируем какой-нибудь базис $V$ и рассмотрим уравнение

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0.$$

Будем считать, что не все $a_{ij}$ равны нулю. Помимо замены базиса, будем рассматривать также преобразование параллельного переноса, т.е. замену координат вида $x \mapsto x + p$. Перепишем уравнение в виде

$$S(x) = x^TAx + 2Bx + c = 0,$$

где $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, $B^T \in K^n$, $c \in K$, и изучим поверхность

$$S := \{x \in V | S(x) = 0\},$$

Легко видеть,что ранг и сигнатура квадратичной формы $\kappa(x) = x^TAx$ не меняется при рассматриваемых заменах координат (т.к. она вообще не изменяется при сдвиге, а сигнатура и ранг инвариантны относительно замены базиса). Будем называть $\kappa(x) = x^TAx$ малой квадратичной формой.

Определим квадратичную форму $\Omega(x,t)$ в пространстве $V \oplus K$: $\Omega(x,t) = \kappa(x) + 2tBx + ct^2$. Будем называть ее большой квадратичной формой. Ее ранг и сигнатура тоже не меняются при замене координат. Ясно, что $S(x) = \Omega(x,1)$. Матрица $\Omega$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & c \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем вложение

$$i : V \hookrightarrow V \oplus K$$
$$v \mapsto (v, 1).$$

Тогда интересующая нас поверхность $S = i(V) \cap \{(v, w) \in V \oplus K | \Omega(v, w) = 0\}$.

Нас интересуют замены координат, которые являются композицией автоморфизма пространства $V$ и параллельного переноса (т.е. преобразования вида $v \mapsto v + u, u \in V$). Параллельный перенос не является линейным преобразованием. Представим его в виде $v \mapsto v + tu, t = 1$. Тогда можно считать, что в пространстве $V \oplus K$ рассматривается автоморфизм $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v + wt \\ w \end{pmatrix}$. Это автоморфизм с матрицей $C_e^{\overline{e}} = \begin{pmatrix} E_n & u \\ 0_n & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{e} = eC_{\overline{e}}^{e}$, $\overline{v} = C_e^{\overline{e}} v$. Тогда нетрудно видеть, что композиция автоморфизмов пространства $V$ и параллельного переноса является сужением на $i(V)$ автоморфизма пространства $V \oplus K$, матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} C & u \\ 0_n & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $C$ — матрица замены бызиса в пространстве $V$.

**Лемма 4** *Ранг и сигнатура малой и большой квадратичных форм не меняются при преобразованиях (2).*

Интересующая нас гиперповерхность $S(v) = 0$ является сечением гиперповерхности $\Omega(v, w) = 0$ в пространстве $V \oplus K$. А именно $S(v) = \Omega(v, 1)$.

**Лемма 5**

1. *Если малая квадратичная форма невырождена, то преобразованиями вида (2) большую квадратичную форму $\Omega$ можно привести к диагональному виду.*

2. *Если малая квадратичная форма вырождена, то преобразованиями вида (2) большую квадратичную форму $\Omega$ можно привести к виду: $\sum_{i \in I} x_i^2 + \sum_{i \notin I} a_i x_i + c$, где $I \subset \{1, \dots, n\}$.*

**Доказательство.** $\mathbf{C} := \begin{pmatrix} C & u \\ 0_n & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^T \begin{pmatrix} G & a \\ a^T & c \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C^T G C & C^T G u + C^T a \\ u^T G C + a^T C & uTGu + u^T a + a^T u + c \end{pmatrix}$ Подберем нужные $C$ и $u$.как и в предыдущем пункте приводим к виду $\sum x_i^2 + \sum a_i x_i + c$, а затем выделяя полный квадрат переходим к нужному виду.$\square$

**Кривые второго порядка.** Остановимся на случае $n = 2$.

### 1.4 Кососимметрические билинейные формы. Симплектический базис.

[3] $K$ — произвольное поле. $\dim V = n$, $\alpha$ — кососимметрическая билинейная форма.

**Определение 8** *Базис $e_1, \dots, e_n$ симплектический, если $\alpha(e_{2k-1}, e_{2k}) = 1$ при $k = 1..m$ и $\alpha(e_i, e_j) = 0$ во всех остальных случаях.*

**Теорема 4** *Для любой кососимметрической билинейной формы существует симплектический базис.*

**Доказательство.** Индукция по $n$. Пусть $n > 1$ и $\alpha \neq 0$. Тогда найдутся $e_1, e_2 \in V$ для которых $\alpha(e_1, e_2) \neq 0$. Можно считать, что $\alpha(e_1, e_2) = 1$. Далее

$$V = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}.$$

По предположению индукции в $\langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}$ есть симплектический базис.□ Ранг кососимметрической билинейной формы всегда четный.

## 2 Евклидовы и унитарные пространства

Скалярные произведения, матрица Грама, ортогональные и самосопряженные операторы. Метрика. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогонализация.

**Определение 9** *Евклидово векторное пространство — конечномерное вещественное векторное пространство $V$ с положительно определенной симметричной билинейной формой*

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x, y \mapsto (x, y).$$

*Эрмитово пространство*

*Гомоморфизмом евклидовых(эрмитовых) пространств будем называть гомоморфизм соответствующих векторных пространств, сохраняющий скалярное произведение. Т.е. $f : V \longrightarrow U$ такой, что $(f(x), f(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in V$.*

**Примеры:** Евклидовы пространства:

1. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
2. Пространство многочленов, степени не выше $n$ с произведением $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
3. Пространство $C([a, b])$, с таким же произведением.

Эрмитовы пространства:

1. $\mathbb{C}^n$ с эрмитовой структурой

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i$$

2. Пространство $C([a, b])$, с эрмитовым произведением $(f, g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$.

#### 2.0.1

Пусть $V$ — евклидово или эрмитово пространство.

**Определение 10** *Матрица (евклидова или эрмитова) скалярного произведения*

$$G(v_1, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

*называется матрицей Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$.*

### 2.1 Овеществление

[5, стр 370] Пусть $V$ векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} V = n$. Можно рассматривать $V$ и как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Обозначим полученное вещественное пространство $V_{\mathbb{R}}$.

**Определение 11** *$V_{\mathbb{R}}$ — овеществление $V$.*

Заметим, что $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

### 2.2 Евклидовы пространства.

**Лемма 6** *Для любых векторов $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы.*

**Доказательство.** В случае если векторы линейно независимы, они образуют базис, и утверждение следует из критерия Сильвестра. Если векторы линейно зависимы, то $0 = \sum \lambda_i v_i$, а значит строки матрицы $G$ линейно зависимы, поэтому $\det G = 0$. $\square$

**Определение 12** *Длина вектора $v \in V$*

$$||v|| = \sqrt{(v, v)}.$$

Проверим, что так определенная длина является нормой. Очевидны все свойства кроме неравенства треугольника.

**Теорема 5** *Пусть $V$ — евклидово пространство. Тогда для любых $x, y \in V$ выполнено*

1. $|(x,y)|^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$ *(неравенство Коши-Буняковского-Шварца);*
2. $||x \pm y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

**Доказательство**(см. [1, глава 7] или [2, глава III,§2])

1. Применим лемму 6 для двух векторов.
2. Возводя неравенство треугольника в квадрат, получаем $(x+y, x+y) \leqslant ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y||$. Раскрывая скобки в левой части и сокращая $||x||^2 + ||y||^2$ имеем $2\,\mathrm{Re}(x,y) = (x,y) + (y,x) \leqslant 2||x||||y||$. Последнее неравенство следует из того, что $\mathrm{Re}(x,y) \leqslant |(x,y)|$ и неравенства КБШ.

□

**Следствие 3**

$$-1 \leqslant \frac{(x,y)}{||x|| \cdot ||y||} \leqslant 1$$

**Определение 13**

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{||x|| \cdot ||y||},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

*Векторы ортогональны, если $(x,y) = 0$.*

### 2.3 Ортогонализация

Пусть $V$ — евклидово пространство.

**Определение 14** *Базис $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ и ортонормированным, если*

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

**Предложение 2** *Ненулевые взаимно ортогональные векторы линейно независимы.*

**Доказательство**(см. [2, глава III,§2 стр 107])

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ взаимно ортогональны и $e_i \neq 0$. Предположим

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0.$$

Домножив обе части равенства на $e_i$, учитывая, что форма $(,)$ положительно определена, легко получить, что $\alpha_i = 0$. $\square$

Пусть $e_1, \dots, e_n \in V$ и $e_1 \neq 0$. Применим построения из 1.2.1 Построим набор векторов $e'_1, \dots, e'_n \in V$ следующим образом

$$e'_1 = e_1$$
$$e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(e_{k+1}, e'_i)}{(e'_i, e'_i)} e'_i$$

**Теорема 6** *Для любых $i, j, k \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ выполнены следующие утверждения.*

1. $(e'_i, e'_j) = 0$.
2. $\langle e_1, \dots e_n \rangle = \langle e'_1, \dots e'_n \rangle$.
3. *Если $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то и $e'_1, \dots, e'_n$ линейно независимы, в частности, $e'_i \neq 0$ при всех $i$.*
4. $e_k \in \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$, *то* $e'_k = 0$.
5. *Если $e_1, \dots, e_n$ система образующих $V$, то ненулевые из векторов $e'_1, \dots, e'_n$ образуют базис $V$.*
6. *Если $e_1, \dots, e_n$ — базис $V$, то $e'_1, \dots, e'_n$ — ортогональный базис $V$.*

#### 2.3.1 Ортогональные матрицы.

От ортогонального базиса нетрудно перейти к ортонормированному. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства $V$. Тогда, в силу формулы (1), базис $e' = eC$ является ортонормированным тогда и только тогда, когда $C^T E C = C^T C = E$. Матрицы $C$, обладающие этим свойством, называются ортогональными.

#### 2.3.2 Ортогональная проекция.

Пусть $U \leqslant V$, тогда $(,)|_U$ положительна определена, а значит невырождена. Поэтому $V = U + U^{\perp}$, т.е. $\forall v \in v$ представляется единственным образом в виде $v = u_1 + u_2$, где $u_1 \in U, u_2 \in U^{\perp}$.

**Определение 15** *Вектор $u_1$ называется ортогональной проекцией $v$ на $U$. Обозначим* $\mathrm{pr}_U v := u_1$, $\mathrm{ort}_U x := u_2$.

**Замечание 4** *Если $e_1, \dots, e_k$ — ортонормированный базис $U$, то*

$$\mathrm{pr}_U x = \sum_{i=1}^{k} (v, e_i) e_i.$$

Для двух подмножеств $X$ и $Y$ метрического пространства $V$ определим расстояние

$$\rho(X, Y) := \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y).$$

**Предложение 3** *Расстояние от вектора $v$ до подпространства $U$ евклидова пространства $V$ равно $||ort_U v||$.*

**Доказательство** ([3]) $\forall u \in U$
$||v - u|| = ||u_2 + (u_1 - u)|| = \sqrt{|u_2|^2 + |u_1 - u|^2} > ||u_2||$. □

**Следствие 4** *Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис подпространства $U$, тогда*

$$\rho(v, U)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, v)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$$

**Доказательство**(см. [3, стр 208]) Если $v \in U$, то $e_1, \dots, e_k, v$ линейно зависимы и $\det G(e_1, \dots, e_k, v) = 0 = \rho(v, U)$. Пусть $v \notin U$ и $z = \mathrm{ort}_U v$. Применим теорему 1 к $U \oplus \langle v \rangle$. Получим

$$||z||^2 = (z, z) = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, v)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}.$$

□

**Объем параллелепипеда** Параллелепипед, натянутый на векторы $a_1, \dots, a_n$ евклидова пространства

$$P(a_1, \dots, a_n) = \{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i | 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}.$$

Высота $\mathrm{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle} a_n$. Объем $n$-мерного параллелепипеда = основание на высоту. При $n = 1$ положим $\mathrm{Vol}(P(a)) = ||a||$.

**Предложение 4** *1.* $\mathrm{Vol} P(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_n)}$.

*2. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис $V$ и $(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$, тогда*

$$\mathrm{Vol} P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|.$$

**Доказательство**(см. [3])

1. Индукция по $n$. При $n = 1$ формула следует из определения. Пусть $n > 1$, тогда

$$\mathrm{Vol}P(a_1, \ldots, a_n)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot ||\mathrm{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle} a_n|| =$$
$$= \det G(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot \frac{\det G(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)}{\det G(a_1, \ldots, a_{n-1})} = \det G(a_1, \ldots, a_n)$$

2. 
$$G(a_1, \ldots, a_n) = A^T E A = A^T A \Longrightarrow \det G(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2$$

□

### 2.4 Классификация евклидовых пространств.

**Теорема 7** *Конечномерные евклидовы пространства одной размерности изоморфны. Евклидово пространство размерности $n$ изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство** Рассмотрим ортонормированные базисы и гомоморфизм, матрица которого единичная в выбранных базисах. □

### 2.5 Эрмитовы пространства

Многие утверждения, аккуратно разобранные нами выше для евклидовых пространств, верны также и для эрмитовых пространств.

- Полуторалинейная форма в координатах:
$$\alpha(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i y_j.$$
- При переходе к другому базису $eC$ матрица формы преобразуется по формуле $\bar{C}^T AC$.
- Полуторалинейная форма является эрмитовой тогда и только тогда, когда ее матрица удовлетворяет соотношению $\bar{A}^T = A$.
- Эрмитова квадратичная форма $q(x) = (x, x)$ вещественна.
- поляризация
- Для любой полуторалинейной эрмитовой формы существует ортогональный базис.
- Для всякого вектора $v$ эрмитова пространства $V$ выполнено $(v, v) = \overline{(v, v)}$, поэтому $(v, v) \in \mathbb{R}$ и можно определить норму вектора $||v|| = \sqrt{(v, v)}$.

- Всякое конечномерное унитарное пространство $V$ имеет ортонормированный базис и изоморфно $\mathbb{C}^{\dim V}$ с произведением $(x, y) = \sum \bar{x}_i y_i$.

**Лемма 7** *Для любых векторов $v_1, \ldots, v_m$ определитель их матрицы Грама $\det G(v_1, \ldots, v_k)$ вещественный и неотрицательный, причем равен нулю тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.*

**Доказательство:** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. И пусть $C$ — матрица координат $v_1, \ldots, v_m$ в этом базисе, т.е. $(v_1, \ldots, v_m) = (e_1, \ldots, e_n)C$. Тогда $G_v = \bar{C}^T C$. Если $n < m$ то ранг $G_v$ меньше ее размера, а значит $\det G_v = 0$. Если $n = m$, то

$$\det G_v = |\det C|^2 \geq 0.$$

□

**Следствие 5** *Неравенство КБШ и неравенство треугольника*

$$||v||^2 ||w||^2 \geq (v, w) \cdot \overline{(v, w)}.$$

**Замечание 5** *Угол между двумя комплексными прямыми $\mathbb{C}v$ и $\mathbb{C}w$ можно определить из равенства*

$$\cos \varphi = \frac{|(v, w)|}{||v|| \cdot ||w||}.$$

*Однако обратите внимание, что выражение $\cos \varphi = \frac{(v,w)}{||v|| \cdot ||w||}$ может уже не являться вещественным. Подробнее см. [5, 20.1.8]*

**Определение 16** *Матрицы перехода между ортонормированными базисами эрмитова пространства называются унитарными.*

Матрица $C$ унитарная тогда и только тогда, когда $\bar{C}^T C = E$.

#### 2.5.1 Овеществление и комплексификация

Напомним, что если $V$ векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, то можно рассматривать $V$ и как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Обозначим полученное вещественное пространство $V_{\mathbb{R}}$.

**Определение 17** *$V_{\mathbb{R}}$ — овеществление $V$.*

Заметим, что $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$. Если $U$ и $V$ — пространства над $\mathbb{C}$ и $a \in \operatorname{Hom}(U, V)$, то можно рассмотреть линейное отображение $a_{\mathbb{R}} \in \operatorname{Hom}(U_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$.

**Лемма 8** *Пусть $U$ и $V$ — пространства над $\mathbb{C}$ и $a \in \operatorname{Hom}(U,V)$ и пусть $e_1, \dots e_n$, $e'_1, \dots, e'_m$ — базисы $U$ и $V$ соответственно и $A = B + iC$ — матрица $a$ в этих базисах, причем $B, C \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Тогда матрица $a_{\mathbb{R}}$ в базисах $e_1, \dots e_n, ie_1, \dots, ie_n$; $e'_1, \dots, e'_m, ie'_1, \dots, ie'_m$ имеет вид* $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.

**Комплексификация.** Пусть $V$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим $V \oplus V$ с умножением на элементы $\mathbb{C}$ заданным следующим образом:

$$(\alpha + i\beta)(u, v) = (\alpha u - \beta v, \alpha v + \beta u).$$

Полученное пространство над $\mathbb{C}$ обозначим через $V^{\mathbb{C}}$ и назовем комплексификацией $V$. Зафиксируем естественное вложение

$$\begin{gathered} V \longrightarrow V^{\mathbb{C}} \\ v \mapsto (v, 0). \end{gathered}$$

Теперь каждый вектор $v$ из $V^{\mathbb{C}}$ может быть записан в виде $v = u_1 + iu_2$. Всякому отображению $a \in \operatorname{Hom}(U, V)$ вещественных векторных пространств можно сопоставить линейное отображение $a^{\mathbb{C}} \in \operatorname{Hom}(U^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$, положив

$$a^{\mathbb{C}}(u_1 + iu_2) := a(u_1) + ia(u_2).$$

**Замечание 6**
- *$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$, причем базис $V$ над $\mathbb{R}$ является базисом и $V^{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$.*
- *Матрица $a^{\mathbb{C}}$ в том же самом базисе, рассмотренном как базис $V^{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей $a$.*

# 3 Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах

## 3.1 Унитарные и ортогональные операторы

Пусть $V$ — евклидово или эрмитово пространство.

**Определение 18** *Группа изометрий $V$ —-*

$$\{a \in \operatorname{Aut} V | (a(u), a(v)) = (u, v), \forall u, v \in V\}.$$

**Предложение 5** *Пусть $V$ — евклидово или эрмитово пространство. Следующие условия эквивалентны.*

1. *$a$ — изометрия.*
2. *$||a(v)|| = ||v||$, $\forall v \in V$.*

3. *Для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства $V$ выполнено*
$$\bar{A}^T G A = G,$$
*где $G$ — матрица Грама, $A = a_e$.*

4. *Для некоторого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства $V$ выполнено*
$$\bar{A}^T G A = G,$$
*где $G$ — матрица Грама, $A = a_e$.*

5. *$a$ переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный.*

**Замечание 7** *Предложение остается верным и в случае если $V$ произвольное векторное пространство с невырожденной билинейной симметричной формой над полем, с характеристикой не равной двум.*

**Определение 19** *Линейный оператор $a : V \to V$ на эрмитовом(евклидовом) пространстве $V$ называется унитарным(ортогональным), если*
$$||a(v)|| = ||v||, \quad \forall v \in V.$$

#### 3.1.1

**Предложение 6** *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V > 1$ и $a \in \mathrm{End}(V)$. Тогда в $V$ существует одномерное или двумерное инвариантное относительно $a$ подпространство.*

**Доказательство.**(см. [4, п. 16§12 часть 1]) Если характеристический многочлен $\chi_a$ оператора $a$ имеет вещественные корни, то достаточно рассмотреть подпространство, порожденное соответствующим собственным вектором. Предположим, что все корни $\chi_a$ комплексные. Рассмотрим оператор $a^{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V^{\mathbb{C}})$. Заметим, что в силу замечания 6 $\chi = \chi_{a^{\mathbb{C}}} = \chi_a \in \mathbb{R}[X]$. Пусть $\alpha + i\beta$ — корень $\chi$, тогда в $V^{\mathbb{C}}$ ему соответствует собственный вектор $u + iv$ оператора $a^{\mathbb{C}}$. Тогда
$$a(u) + ia(v) = a^{\mathbb{C}}(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv) = \alpha u - \beta v + i(\beta u + \alpha v),$$
а значит $a(u) = \alpha u - \beta v$, $a(v) = \beta u + \alpha v$. Таким образом $\langle u, v\rangle$ — двумерное инвариантное подпространство. $\square$

### 3.1.2

Изучим все ортогональные операторы одномерного и двумерного евклидова пространства. Пусть $V$ — евклидово пространство. И $a \in O(V)$ — ортогональный оператор. Если $\dim V = 1$, то нетрудно убедиться в том, что $a = \pm\operatorname{id}$. Пусть $\dim V = 2$. Выберем ортонормированный базис. Теперь осталось изучить подгруппу ортогональных матриц $O(n) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) | A^T A = 1\}$ в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Из равенства $A^T A = E$ следует, что $\det A = \pm 1$. Легко проверить, что $SO(2) = \{A \in O(2) | \det A = 1\}$ — подгруппа индекса 2 в $O(2)$ и, значит, любая ортогональная матрица с определителем равным -1 имеет вид $A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $A \in SO(2)$. Пусть $A \in SO(2)$ и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Из $A^T A = E$ получаем

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

откуда следует, что

$$A = A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

для некоторого $\varphi \in [0, 2\pi)$. Матрица $A$ соответствует оператору поворота на угол $\varphi$.

Написать про ориентацию в евклидовом пространстве и почему ее нет в эрмитовом.Эрмитов оьъем

**Теорема 8** *1. Пусть $V$ — эрмитово и $a \in \mathrm{End}(V)$, тогда оператор a унитарный тогда и только тогда, когда $\mathrm{Spec}(a) \subset \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ и существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора a диагональна.*

*2. Пусть $V$ — евклидово и $a \in \mathrm{End}(V)$, тогда оператор a ортогональный тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора a имеет вид*

$$\begin{pmatrix} A(\varphi_1) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A(\varphi_2) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A(\varphi_m) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *Собственные векторы ортогонального или унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.*

**Доказательство.**(см. [4])

1. " $\Longleftarrow$ " Пусть $A$ — матрица оператора $a$ в ортонормированном базисе, в котором матрица оператора $a$ диагональна. Тогда на диагонали стоят собственные значения оператора и $\overline{A}^T A$ тоже диагональна, причем на диагонали $\overline{A}^T A$ стоят модули собственных чисел, т.е. 1. Таким образом $\overline{A}^T A = E$, а значит оператор $a$ унитарный.
   " $\Longrightarrow$ " Индукция по $\dim V$. В случае $\dim V = 1$ утверждение тривиально. Пусть $\dim V > 1$ и $\lambda$ — собственное значение $a$. Тогда $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$. Теперь достаточно показать, что $V_\lambda^\perp$ - $a$-инвариантно. Действительно, пусть $v \in V_\lambda^\perp$, тогда $\forall u \in V_\lambda$
   $$(a(v), u) = (a(v), a(\frac{1}{\lambda}u) = (v, \frac{1}{\lambda}u) = \frac{1}{\lambda}(v, u) = 0.$$
2. " $\Longleftarrow$ " аналогично предыдущему пункту.
   " $\Longrightarrow$ " Индукция по $\dim V$. Случай $\dim V = 1; 2$ разобран выше. Если $\dim V > 2$, то в нем найдется одномерное или двумерное $a$-инвариантное подпространство $U$. И $V = U \oplus U^\perp$. Достаточно показать, что $U^\perp$ $a$-инвариантно. В случае $\dim U = 1$ это можно сделать как показано выше, пусть $\dim U = 2$ $v \in U^\perp$, тогда $\forall u \in U$ имеем
   $$(a(v), u) = (a(v), a(a^{-1}(u)) = (v, a^{-1}(u)) = 0.$$
3. Пусть

### 3.2 Сопряженные операторы

Выше для векторных пространств $V$ и $W$ оператора $a \in \mathrm{Hom}(V, W)$ был определен сопряженный оператор $a^* : W^* \to V^*$. Введем понятие сопряженных операторов для эрмитова или евклидова пространства. Ниже будет пример поясняющий связь между этими определениями. Во избежание путаницы, оператор $a^*$, введенный в прошлом году, ниже будет обозначаться $a'$.

**Определение 20** *Линейные операторы* $a, a^* \in \mathrm{Hom}(V, V)$ *называются сопряженными, если*

$$(a^*(v), w) = (v, a(w)), , \forall v, w \in V.$$

На языке матриц последнее равенство эквивалентно

$$\overline{A}^{*T} G = GA.$$

**Замечание 8** *В случае конечномерного евклидова пространства $V$ с помощью скалярного произведения можно отождествить пространства $V$ и $V^*$. Имеется изоморфизм(а в бесконечномерном случае лишь вложение)*

$$r : V \to V^*$$
$$v \mapsto (\cdot, v).$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ V^* & V^* \end{tikzcd},$$

1. *Если на $V^*$ ввести скалярное произведение*

$$((u, \cdot), (x, \cdot)) := (u, v),$$

*то, упомянутое выше отображение является изоморфизмом евклидовых пространств.*

2. *Ортонормированный базис перейдет в двойственный базис.*

3. *В случае эрмитова пространства так же определенное отображение будет антилинейным по отношению к умножению на комплексные числа, т.е.*

$$r(zv) = \bar{z} \cdot r(v).$$

4. *Следующая диаграмма коммутативна т.е. (и в евклидовом и в эрмитовом случае) $a^* = r^{-1} a' r$, где $a' \in \mathrm{Hom}(V^*, V^*)$.*

Матрица сопряженного оператора $A^*$ удовлетворяет равенству

$$A^* = G^{-1} A^T G.$$

### 3.3 Самосопряженные операторы

**Определение 21** *Пусть $V$ — евклидово или эрмитово пространство. Оператор $a \in \mathrm{End}(V)$ называется самосопряженным, если $a = a^*$.*

**Замечание 9** *Оператор $a$ в евклидовом или эрмитовом пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица симметрична ($A^T = A$) или эрмитова ($\overline{A}^T = A$) соответственно.*

**Теорема 9** *1. Пусть $V$ — евклидово или эрмитово пространство и $a \in \mathrm{End}(V)$. Тогда оператор $a$ самосопряженный тогда и только тогда, когда $\mathrm{Spec}(a) \in \mathbb{R}$ и существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $a$ диагональна.*

*2. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.*

**Доказательство.**(см. [4])

1. " $\Longleftarrow$ " Диагональная матрица удовлетворяет свойству $\overline{A}^T = A$.

   $\Longrightarrow$

   Покажем сначала, что все корни характеристического многочлена $\chi_a$ вещественные. Если $V$ — эрмитово пространство, то для всякого собственного числа $\lambda$ и соответствующего собственного вектора $v$ выполнено
   $$\lambda(v,v) = (v,\lambda v) = (v,a(v)) = (a(v),v) = (\lambda v,v) = \overline{\lambda}(v,v),$$
   откуда $\overline{\lambda} = \lambda$, а значит, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Пусть теперь $V$ — евклидово. Снабдим $V^{\mathbb{C}}$ скалярным произведением
   $$(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = (u_1,u_2) + i(u_1,v_2) - i(v_1,u_2) + (v_1,v_2).$$
   Непосредственно проверяется, что $V^{\mathbb{C}}$ — эрмитово пространство, а $a^{\mathbb{C}}$ самосопряженный оператор на нем. Тогда все корни $\chi_{a^{\mathbb{C}}}$ вещественны, но $\chi_{a^{\mathbb{C}}} = \chi_a$.

   Далее действуем индукцией по $\dim V$. Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(a)$, тогда $V = V_\lambda + V_\lambda^\perp$. Достаточно показать, что $V_\lambda$ и $V_\lambda^\perp$ являются $a$ -инвариантными. Про $V_\lambda$ это очевидно. Проверим, что $V_\lambda^\perp$ инвариантно. Действительно, если $v \in V_\lambda^\perp$, то $\forall u \in V_\lambda$ выполнено
   $$(u,a(v)) = (a(u),v) = \overline{\lambda}(u,v) = 0.$$

2. Пусть $a(v) = \lambda v$, $a(u) = \mu u$, тогда
   $$\overline{\lambda}(u,v) = (a(u),v) = (u,a(v)) = \mu(u,v).$$
   Поэтому $(u,v) = 0$. $\square$

**Следствие 6** *Если вещественная или комплексная матрица $A$ удовлетворяет равенству $\overline{A}^T = A$, то все корни ее характеристического многочлена вещественны. Более того, существует матрица $C$ из $O(n)$ или $U(n)$ соответственно, такая, что $C^{-1}AC = \overline{C}^T AC$ диагональна.*

**Доказательство.** Матрице $A$ соответствует самосопряженный оператор $a$ в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ соответственно. Матрица  соответствует матрице перехода к ортонормированному базису, в котором матрица оператора $a$ диагональна. $\square$

### 3.4 Еще раз о поверхностях второго порядка

Пусть $V$ — $n$-мерное евклидово пространство. Зафиксируем какой-нибудь ортонормированный базис $V$ и рассмотрим уравнение

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0.$$

Будем считать, что не все $a_{ij}$ равны нулю. Напомним, что с рассматриваемой поверхностью связаны две квадратичных формы с матрицами $A = (a_{ij})$ и $\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & c \end{pmatrix}$. Будем рассматривать композиции сдвигов и ортонормированных замен базиса, т.е. преобразования вида

$$\begin{pmatrix} C & u \\ 0_n & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $C$ —ортогональная матрица замены бызиса в пространстве $V$.

**Лемма 9** *1. Если малая квадратичная форма невырождена, то преобразованиями вида (3) большую квадратичную форму $\Omega$ можно привести к диагональному виду.*

*2. Если малая квадратичная форма вырождена, то преобразованиями вида (3) большую квадратичную форму $\Omega$ можно привести к виду: $\sum_{i\in I} x_i^2 + \sum_{i\notin I} a_ix_i + c$, где $I \subset \{1,\ldots,n\}$.*

**Доказательство.**

### 3.5 Нормальные операторы

**Определение 22** *Оператор $a$ действующий на эрмитовом пространстве $V$ называется нормальным, если $a \circ a^* = a^* \circ a$.*

Самосопряженные, антисамосопряженные и унитарные операторы являются нормальными. (т.к. $a^* = \pm a, a^{-1}$)

**Теорема 10** *1. Оператор $a$ нормален тогда и только тогда, когда он диагонализуем в ортогональном базисе. При этом диагональная матрица с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора диагонализующего ортонормального базиса.*

*2. Самосопряженные операторы = диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с вещественными собственными значениями.*

3. *Антисамосопряженные операторы = диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с чисто мнимыми собственными значениями.*

4. *Унитарные операторы = диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с собственными значениями, по модулю равными единице.*

**Доказательство:** (см. [5, 20.3])

1. "$\Longleftarrow$"Пусть $e$ — ортонормированный базис, в котором матрица $a_e = A$ диагональна. Тогда $A^* = a_e^* = \overline{A}^T$, и $AA^* = A^*A$, а значит $a$ — нормальный оператор.

   "$\Longrightarrow$"Индукция по $\dim V$. При $\dim V = 1$ утверждение очевидно. Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим $V_\lambda$ для некоторого собственного значения $\lambda$. Покажем, что подпространства $V_\lambda, V_\lambda^\perp$ $a$-инвариантны и $a^*$ — инвариантны. Ясно, что $V_\lambda$ $a$-инвариантно. Покажем, что $V_\lambda$ $a^*$ — инвариантно. Пусть $v \in V_\lambda$, тогда
$$aa^*v = a^*av = a^*\lambda v = \lambda a^* v,$$
   и значит $a^*v \in V_\lambda$. Теперь покажем, что $V_\lambda^\perp$ $a$-инвариантно. Пусть $v \in V_\lambda^\perp$, тогда $\forall u \in V_\lambda$
$$(av, u) = (v, a^*u) = 0.$$
   Осталось показать, что $V_\lambda^\perp$ $a^*$ — инвариантно. Пусть $v \in V_\lambda^\perp$, тогда $\forall u \in V_\lambda$
$$(a^*v, u) = (v, au) = (v, \lambda u) = 0.$$
   Легко видеть, что $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ и ограничения $a$ и $a^*$ на $V_\lambda^\perp$ и $V_\lambda$ коммутируют. А значит по индукции получаем требуемое утверждение.

### 3.6 Полярное разложение

**Лемма 10** *Пусть $V$ — эрмитово и $a \in \mathrm{End}(V)$. Тогда $a^*a$ и $a^*a$ — самосопряженные операторы с неотрицательными собственными значениями.*

**Доказательство:**Легко видеть, что $a^*a$ и $a^*a$ — самосопряженные операторы. Значит их собственные значения вещественны. Пусть $aa^*v = \lambda v \neq 0$, тогда $\lambda(v, v) = (aa^*v, v) = (a^*v, a^*v)$, откуда $\lambda = \frac{(a^*v, a^*v)}{(v,v)} > 0$. Аналогично для $a^*a$. $\square$

**Лемма 11** *Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$, $a, b \in \mathrm{End}(V)$ и $ab = ba$. Тогда у операторов $a$ и $b$ есть хотя бы один общий собственный вектор.*

**Доказательство:**Индукция по $\dim V$. Случай $\dim V = 1$ тривиален. Пусть $\dim V > 1$. Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(a)$, тогда для всякого собственного вектора $v$, такого что $av = \lambda v$ верно, что $abv = bav = \lambda bv$, т.е. $V_\lambda^{(a)}$ — $b$-инвариантно. Выберем в $V_\lambda^{(a)}$ собственный вектор для оператора $b$, он будет общим собственным вектором. $\square$

**Следствие 7** *Если диагонализуемые операторы коммутируют, то существует базис, в котором матрицы каждого из операторов диагональны.*

**Теорема 11** *Пусть $V$ — эрмитово и $a \in \mathrm{Aut}(V)$. Тогда существует и единственное представление $a$ в виде $a = s_1u_1 = u_2s_2$, где операторы $s_i$ и $u_i$ такие, что $s_i$ — самосопряженный, $u_i$ — унитарный и $\mathrm{Spec}(u_i) \in \mathbb{R}_{>0}$.*

**Доказательство:**<u>Существование.</u> $a^*a$ и $a^*a$ — самосопряженные операторы с неотрицательными собственными значениями. Пусть $B_1$ и $B_2$ диагональные матрицы с положительными числами на диагонали, соответствующие операторам $a^*a$ и $a^*a$. Пусть $s_1$ и $s_2$ — операторы, соответствующие (в тех же базисах) матрицам $\sqrt{B_1}$ и $\sqrt{B_2}$, полученным извлечением квадратных корней из элементов матриц $B_1$ и $B_2$. Тогда $s_1^2 = a^*a$, $s_1a^*a = a^*as_1$ и $s_2^2 = aa^*$, $s_2aa^* = aa^*s_2$. Положим $u_1 = as_1^{-1}$, $u_2 = s_2^{-1}a$. Проверим, что $u_1, u_2$ — унитарные операторы.

$$(u_1x, u_1y) = (as_1^{-1}x, as_1^{-1}y) = (x, s_1^{-1}a^*as_1^{-1}y) = (x, s_1^{-1}s_1^2s_1^{-1}y) = (x, y)$$
$$(u_1x, u_2, y) = (s_1^{-1}ax_, s_2^{-1}ay) = (x, a^*s_2^{-1}s_2^{-1}ay) = (x, a^*(aa^*)^{-1}ay) = (x, y).$$

Ясно, что $a = u_1s_1 = s_2u_2$.

<u>Единственность</u> Пусть $a = s_1u_1$. Тогда $a^*a = s_1u_1u_1^*s_1 = s_1^2$, т.к. $u_1$ унитарный. Тогда $a^*as_1 = s_1a^*a$, а значит для них существует базис, в котором матрицы операторов $a^*a$ и $s_1$ диагональны. Причем $s_1^2 = a^*a$, поэтому оператор $s_1$ определен однозначно, а значит и $u_1 = s_1^{-1}a$.$\square$

## Список литературы


[1] http://alexei.stepanov.spb.ru/students/temp/conspect.pdf

[2] Кострикин А.И. "Введение в алгебру". Часть II. Линейная алгебра.

[3] Винберг

[4] Кострикин Манин

[5] А.Л. Городенцев "Алгебра-1"учебник для студентов-математиков первого курса

[6] Аржанцев И. В. "Базисы Грчбнера и системы алгебраических уравнений". Ч М.: МЦНМО, 2003. Ч 68 с

[7] ван дер Варден