DL 31.

а) Докажите, что при суммировании двоичных чисел $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ и $\overline{b_n b_{n-1} \dots b_1}$ перенос в i-м разряде происходит тогда и только тогда, когда число $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ больше числа $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$, где $b'_k = 1 - b_k$ для всех k от 1 до n. Далее считаем, что $n = 2^m$.

б) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_j a_{j-1} \dots a_{j-2^k+1}}$ с $\overline{b'_j b'_{j-1} \dots b'_{j-2^k+1}}$ для всех $k \leq m$ и всех j, кратных 2^k (при этом $j \leq n$). Результат сравнения можно хранить в двух битах: 00, если первое число меньше, 11, если первое число больше и 10, если числа равны.

в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n.

г) Покажите, что существует схема для сложения двух n-битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DL 32. Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух n-битных чисел размера $O(n^2)$ и глубины $O(\log n)$.

DL 33. Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0,1\}^{2k+1} \to \{0,1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k+1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

DL 34. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат S. Интерпретация: точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикаты:

а) A, B, C лежат на одной прямой;

б) A, B, C, D — суть вершины параллелограмма;

в) $|AB| = |CD|$;

г) $OA < OB$;

д) равенство треугольников;

е) равенство углов;

ж) свойство угла быть прямым.

DL 35. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве целых чисел. Как выразить предикат $y = x + 1$?

DL 36. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, y = x^2)$ на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат $xy = z$?

DL 37. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двуместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?

DL 22. $f(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_{n+1}) = [\sum\limits_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum\limits_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum\limits_{i=0}^{n+1} z_i 2^i]$ ($x + y = z$, где v_i это i битый двоичной записи v). Постройте формулы ϕ_n в КНФ, полиномиального размера от n (сумма числа переменных по всем дизъюнктам ограниченна полиномом от n), что верно следующие

$$\exists g_0, \dots, g_{m_n}\ \phi_n(x_0, \dots, z_{n+1}, g_0, \dots, g_{m_n}) \iff f(x_0, \dots, z_{n+1}).$$

$\boxed{\textbf{DL 28.}}$ Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

$\boxed{\textbf{DL 29.}}$ Правило ослабление позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{DL 30.}}$ Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.