8.11.2017

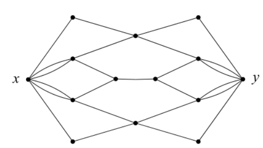
1. Выразить количество n вершин односвязного графа G через количество n_i этих вершин в каждом из k блоков $B_1, \ldots, B_k$ графа G.

2. Доказать, что любая вершина односвязного графа G имеет четную степень тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа эйлеров.

3. Доказать, что граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде
$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_k,$$
где G_0 — произвольный цикл в графе G, а G_i, $i > 0$, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1}$ графа G.

4. *Сильной ориентацией* неориентированного графа назовём такой выбор направления для каждого из его рёбер, что в результате этой операции получившийся ориентированный граф будет состоять из одной компоненты сильной связности. Доказать, что связный граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он рёберно двусвязен, то есть тогда и только тогда, когда в G отсутствуют мосты (Robbins, 1939).

5. Определить размер $\kappa(x, y)$ минимального вершинного и $\lambda(x, y)$ минимального реберного разделяющих x и y множеств для графа G, показанного на рисунке.



6. С помощью теоремы Менгера доказать вершинную k-связность k-мерного гиперкуба Q_k.

7. Доказать, что в k-связном графе для любых k вершин найдется цикл C, на котором лежат все эти k вершин.

8. Показать, что в условиях предыдущего упражнения мы не можем заранее задать порядок, в котором должны проходиться вершины, лежащие на общем для них цикле C.

9. Доказать, что любой k-связный граф G, построенный на $n \geqslant 2k$ вершинах, $k \geqslant 2$, содержит цикл C, длина которого больше или равна $2k$.

10. Пусть G есть k-связный граф, диаметр которого равен d. Доказать, что количество n вершин в таком графе больше или равно $k(d-1)+2$. Для любого $k \geqslant 1$ и $d \geqslant 2$ построить k-связный граф, в котором это неравенство превращается в равенство.