

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 7. Общезначимые формулы логики предикатов

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

27.03.2017

- 1 Общезначимые формулы
- 2 Подстановки термов
- 3 Общезначимые формулы с кванторами
- 4 Предваренная нормальная форма

- 1 Общезначимые формулы
- 2 Подстановки термов
- 3 Общезначимые формулы с кванторами
- 4 Предваренная нормальная форма

- Пусть фиксирована некоторая сигнатура σ .
- Формула φ называется *общезначимой*, если она является истинной в любой интерпретации сигнатуры σ на любой оценке.
- Формула φ называется *необщезначимой*, если она не является общезначимой.
- Формула φ называется *невыполнимой*, если она является ложной в любой интерпретации сигнатуры σ на любой оценке.
- Формула φ называется *выполнимой*, если она не является невыполнимой.
- **Утверждение.** Формула φ общезначима тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ невыполнима.

- *Универсальным замыканием* формулы называется приписывание к ней слева кванторов всеобщности, связывающих все ее свободные переменные.
- **Утверждение.** Общезначимость формулы φ равносильна общезначимости ее универсального замыкания.
- *Экзистенциальным замыканием* формулы называется приписывание к ней слева кванторов существования, связывающих все ее свободные переменные.
- **Утверждение.** Выполнимость формулы φ равносильна **выполнимости** ее экзистенциального замыкания.

- **Теорема.** Если A — тавтология логики высказываний, содержащая пропозициональные переменные p_1, \dots, p_n , а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — произвольные формулы сигнатуры σ , то подстановка этих формул вместо переменных ($p_i := \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$) даст общезначимую формулу.
- **Доказательство.** В любой интерпретации на любой оценке формулы примут определенные булевы значения. Независимо от этих значений итоговый результат будет T , поскольку определяется таблицами истинности пропозициональных связок. ■

- Две формулы φ и ψ называют *эквивалентными*, если в любой интерпретации сигнатуры σ на любой оценке, на которой истинна одна из них, истинна и вторая, и наоборот.
- **Утверждение.** Эквивалентность формул φ и ψ равносильна общезначимости формулы $\varphi \leftrightarrow \psi$.
- **Доказательство.** Следует из определения связки \leftrightarrow . ■
- **Теорема (об эквивалентной замене).** Пусть ψ — подформула формулы φ , и имеется ψ' , такая что $\psi' \leftrightarrow \psi$. Пусть φ' — результат замены в φ некоторого вхождения ψ на ψ' . Тогда $\varphi' \leftrightarrow \varphi$.
- **Доказательство.** Берем произвольную интерпретацию и оценку; указанная замена не изменит истинностного значения подформул. ■

- 1 Общезначимые формулы
- 2 Подстановки термов**
- 3 Общезначимые формулы с кванторами
- 4 Предваренная нормальная форма

- Подстановка формулы логики предикатов вместо пропозициональной переменной в пропозициональную тавтологию не порождает проблем.
- Это не так для подстановки терма вместо индивидуальной переменной в логике высказываний:

$$A(x) \vee \exists x B(x, x)$$

$$x := f(y)$$

- Подстановка формулы логики предикатов вместо пропозициональной переменной в пропозициональную тавтологию не порождает проблем.
- Это не так для подстановки терма вместо индивидуальной переменной в логике высказываний:

$$A(x) \vee \exists x B(x, x)$$

$$x := f(y)$$

- Очевидно, что подстановку следует осуществлять только для свободных вхождений переменной x в формулу:

$$A(f(y)) \vee \exists x B(x, x)$$

- Рассмотрим формулу

$$\exists y(A(x) \vee B(x, y))$$

- Подстановка в неё $x := f(z)$ даст

$$\exists y(A(f(z)) \vee B(f(z), y))$$

- Однако подстановка $x := f(y)$ приведёт к проблеме

$$\exists y(A(f(y)) \vee B(f(y), y))$$

- Такая ситуация носит название *коллизии* (или захвата) переменных.

- Подстановка терма τ вместо переменной x в формулу φ называется *корректной (свободной)*, если в процессе замены всех свободных вхождений x на τ в φ ни одна переменная из τ не попадает в область действия одноименного квантора.
- Иногда про такой терм τ говорят, что он корректен для подстановки вместо x в φ (свободен для x в φ).

- Термы

$$x(x := \tau) = x$$

$$y(x := \tau) = y$$

$$f(t_1, \dots, t_n)(x := \tau) = f(t_1(x := \tau), \dots, t_n(x := \tau))$$

- Формулы

$$R(t_1, \dots, t_n)(x := \tau) = R(t_1(x := \tau), \dots, t_n(x := \tau))$$

$$(\neg \varphi)(x := \tau) = \neg(\varphi(x := \tau))$$

$$(\varphi \wedge \psi)(x := \tau) = \varphi(x := \tau) \wedge \psi(x := \tau)$$

$$(\varphi \vee \psi)(x := \tau) = \varphi(x := \tau) \vee \psi(x := \tau)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi)(x := \tau) = \varphi(x := \tau) \rightarrow \psi(x := \tau)$$

$$(\forall x \varphi)(x := \tau) = \forall x \varphi$$

$$(\forall y \varphi)(x := \tau) = \forall y(\varphi(x := \tau)), \quad y \notin FV(\tau)$$

$$(\exists x \varphi)(x := \tau) = \exists x \varphi$$

$$(\exists y \varphi)(x := \tau) = \exists y(\varphi(x := \tau)), \quad y \notin FV(\tau)$$

Переименование связанных переменных

- Свежей переменной для формулы φ называется такая переменная z , что $z \notin FV(\varphi)$.
- Подстановка свежей переменной всегда корректна.
- Для любой формулы φ общезначимы формулы

$$\forall x \varphi \leftrightarrow \forall z (\varphi(x := z))$$

$$\exists x \varphi \leftrightarrow \exists z (\varphi(x := z))$$

если переменная z свежая для φ .

- Действительно, сравним

$$[\forall x \varphi]_{\pi} = \bigwedge_{d \in D} [\varphi]_{\pi, x := d}$$

$$[\forall z (\varphi(x := z))]_{\pi} = \bigwedge_{d \in D} [\varphi(x := z)]_{\pi, z := d}$$

В первом случае переменная z не входит в φ , во втором x не входит в $\varphi(x := z)$ свободно.

- Пусть имеется формула φ и подстановка $\chi := \tau$, порождающая коллизию.
- Это значит, что некоторая подформула φ имеет вид $\forall y\psi(x)$ (или $\exists y\psi(x)$), причем $y \in FV(\tau)$.
- Мы всегда можем обеспечить корректность подстановки, сделав в φ следующее эквивалентное преобразование. Выберем новую переменную z , свежую для ψ и не встречающуюся в τ , и перейдем к эквивалентной подформуле

$$\forall y\psi \leftrightarrow \forall z\psi(y := z)$$

- 1 Общезначимые формулы
- 2 Подстановки термов
- 3 Общезначимые формулы с кванторами**
- 4 Предваренная нормальная форма

- Для любой формулы φ являются общезначимыми формулы

$$\neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$$

$$\neg \exists x \varphi \leftrightarrow \forall x \neg \varphi$$

- Это дает способ выразить кванторы друг через друга:

$$\forall x \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$$

$$\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$$

Доказательство общезначимости формул с кванторами

- Докажем, например, общезначимость $\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x\neg\varphi(x)$.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π в этой интерпретации.

$$[\neg\forall x\varphi(x)]_{\pi} = \text{T}$$

$$[\forall x\varphi(x)]_{\pi} = \text{F}$$

$$[\varphi(x)]_{\pi, x:=d} = \text{F} \quad (\text{для некоторого } d)$$

$$[\neg\varphi(x)]_{\pi, x:=d} = \text{T}$$

$$[\exists x\neg\varphi(x)]_{\pi} = \text{T}$$



- Для любых формул $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются общезначимыми формулы

$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$$

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$$

$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)$$

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftarrow \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

- Для любых формул $\varphi(x)$ и ψ являются общезначимыми формулы

$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi(x) \wedge \psi$$

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \vee \psi$$

Контрпримеры для неэквивалентных пронесений

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$

- Носитель \mathbb{Z} , интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x < 3)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x > 5)$$

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

- Носитель \mathbb{Z} , интерпретация ???

Контрпримеры для неэквивалентных пронесений

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$

- Носитель \mathbb{Z} , интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x < 3)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x > 5)$$

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

- Носитель \mathbb{Z} , интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x \leq 42)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x > 42)$$

- Для любых формул $\varphi(x)$ и ψ являются общезначимыми формулы

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi(x) \rightarrow \psi$$

$$\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \rightarrow \psi$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi(x)) \leftrightarrow \psi \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi(x)) \leftrightarrow \psi \rightarrow \exists x\varphi(x)$$

- Для любых формул $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются общезначимыми формулы

$$\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x\psi(x)$$

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \leftarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$$

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$$

- Носитель \mathbb{N} , интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x \mid 4)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x \mid 2)$$

- Для любой формулы $\varphi(x)$ и терма τ , корректного для подстановки вместо x в φ , являются общезначимыми формулы

$$\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(x := \tau)$$

$$\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi(x)$$

- В частности в качестве терма τ может быть выбрана свежая для φ переменная y :

$$\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(x := y)$$

$$\varphi(x := y) \rightarrow \exists x\varphi(x)$$

- Поскольку подстановка x вместо x корректна (и ничего не меняет в формуле), то общезначимы формулы

$$\forall x\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

- Для любой формулы $\varphi(x, y)$ являются общезначимыми формулы

$$\forall x \forall y \varphi(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x, y)$$

- Контрпример для формулы, обратной последней: носитель \mathbb{N} , интерпретация $[\varphi] = (>)$.

- Если $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$ и терм τ корректен для подстановки вместо x в φ и в ψ , то

$$\varphi[x := \tau] \leftrightarrow \psi[x := \tau]$$

- То есть корректная подстановка сохраняет эквивалентность.
- Все предыдущие теоремы обобщаются на случай формул с произвольным количеством дополнительных свободных переменных.

- 1 Общезначимые формулы
- 2 Подстановки термов
- 3 Общезначимые формулы с кванторами
- 4 Предваренная нормальная форма

Предваренная нормальная форма

- Формула φ находится в *предваренной нормальной форме*, если она имеет вид $\mathcal{Q}_1 \dots \mathcal{Q}_n \psi$, где \mathcal{Q}_i – квантор, а ψ – безкванторная формула (в КНФ).
- Предваренной нормальной формой формулы φ называется формула φ' , такая что φ' находится в ПНФ, и $\varphi \leftrightarrow \varphi'$.
- Пример. Найти ПНФ формулы $\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$.

$$\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x) \quad \leftrightarrow$$

$$\exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)) \quad \leftrightarrow$$

$$\exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall y \psi(y)) \quad \leftrightarrow$$

$$\exists x \forall y (\varphi(x) \rightarrow \psi(y))$$

- **Теорема.** Любая формула имеет предваренную нормальную форму.
- **Доказательство.** Индукция по структуре формулы.
- **База.** Атомарная формула имеет ПНФ (являясь ей).
- **Шаг.**
 - (1). Формула имеет вид $\neg\varphi$. По ИН $\varphi \leftrightarrow Q_1 \dots Q_n \psi$, тогда $\neg\varphi \leftrightarrow \overline{Q_1} \dots \overline{Q_n} \neg\psi$. (Здесь $\overline{\forall x} = \exists x$ и $\overline{\exists x} = \forall x$.)
 - (2,3,4). Формула имеет вид $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$. Техника пронесения кванторов аналогична примеру с предыдущего слайда.
 - (5,6). Формула имеет вид $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$. Тривиально. ■

- Формула φ находится в *сколемовской нормальной форме*, если она имеет вид $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$, где ψ – безкванторная формула (в КНФ).
- Сколемовской нормальной формой формулы φ называется формула ψ , такая что ψ находится в СНФ, и **выполнимость φ равносильна выполнимости ψ** .
- **Не имеет места $\varphi \leftrightarrow \psi$** , поскольку мы хотим приводить ПНФ к СНФ, а элиминация кванторов существования с сохранением эквивалентности в общем случае невозможна.
- **Теорема.** Для любой замкнутой формулы φ существует формула ψ , находящаяся в СНФ, такая что

$$\varphi \text{ выполнима} \Leftrightarrow \psi \text{ выполнима}$$