Производящие функции Дирихле. Формулы обращения Мебиуса. (ДЗ)

25 апреля 2017 г.

1. Доказать следующую явную формулу для вычисления коэффициентов ϕ_n функции Эйлера:

$$\phi_n = \sum_{d \backslash n} \mu_d \, \frac{n}{d} = n \sum_{d \backslash n} \frac{\mu_d}{d}. \tag{1}$$

2. Доказать эквивалентность доказанной в предыдущем упражнении формулы (1) и формулы

$$\phi_n = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые множители числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

3. Доказать, что функция Мебиуса решетки L_n линейно упорядоченного множества рассчитывается по формуле

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ -1, & \text{если } x = y - 1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4. Доказать, что любая конечная решетка имеет максимальный $\hat{1}$ и минимальный $\hat{0}$ элемент. Привести пример решетки, в которой минимальный элемент отсутствует.

5. Доказать, что в любой решетке $(x \wedge y) \vee y = y$ и $(x \vee y) \wedge y = y$ (законы поглощения).

6. Нарисовать диаграммы Хассе всех решеток, содержащих не более пяти элементов.

7. Определить производящую функцию $f(z)$ для чисел Фибоначчи F_n. Получить с ее помощью явные выражения для этих чисел.

8. Числами Люка (Lucas numbers) называются числа L_n, удовлетворяющие следующему рекуррентному соотношению:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \;\; n \geq 0; \qquad L_0 = 2, \;\; L_1 = 1.$$

   Построить для них производящую функцию и найти явное выражение для L_n.

9. Обобщением чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n являются так называемые последовательности Люка $U_n(p, q)$ и $V_n(p, q)$, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$U_{n+2} = p\,U_{n+1} - q\,U_n, \;\; n \geq 0; \qquad V_{n+2} = p\,V_{n+1} - q\,V_n, \;\; n \geq 0;$$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1; \qquad V_0 = 2, \quad V_1 = p.$$

   Построить производящие функции для этих чисел.

10. В случае $p = 2$, $q = -1$ числа $U_n(2, -1)$ называются числами Пелла P_n (Pell numbers). Доказать для чисел Фибоначчи F_n и для чисел Пелла P_n так называемую формулу Кассини:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n.$$