Совершенные графы. Теорема Турана.

11 марта 2017 г.

1. Доказать, что любой двудольный граф $G[X, Y]$ является совершенным графом.

2. Доказать, что граф равный дополнению некоторого двудольного графа является совершенным (нельзя использовать слабую или сильную гипотезу/теорему Бержа).

3. Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G. При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G. Доказать, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.

4. Докажите, что
$$t(G) \geq \binom{n}{3} + \frac{2m^2}{n} - m(n-2),$$
где $t(G)$ — это количество треугольников в G или $\bar{G}$

5. Рассмотрим n замкнутых интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_n$ на вещественной оси. Построим для этих интервалов граф G на n вершинах $x_1, \ldots, x_n$, соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда пересечение $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Такой граф G называется *интервальным* графом. Доказать, что интервальный граф является совершенным, то есть что $\chi(G) = \omega(G)$.

6. Докажите, что $G \cup H$ совершенный граф если G, H совершенные графы и $G \cap H$ является кликой.

7. Доказать, что в случае выполнения неравенства
$$\sum_{x \in V(G)} \binom{\deg(x)}{2} > (l-1)\binom{n}{2}$$

построенный на n вершинах граф G содержит $K_{2,l}$ в качестве своего подграфа.

8. *Графом сравнимости* (comparability graph) называют граф G, связанный с некоторым частично упорядоченным множеством $(P, \preccurlyeq)$. Множество вершин графа G совпадает с множеством P элементов частично упорядоченного множества. Если два элемента $x, y \in P$, $x \neq y$, сравнимы между собой (то есть $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$), то соответствующие этим элементам вершины x, y графа G соединены между собой ребром.

   По другому этот граф можно определить следующим образом. *Транзитивной ориентацией* графа G называется такая ориентация D ребер этого графа, при которой для любых ориентированных ребер $(x, y) \in E(D)$ и $(y, z) \in E(D)$ найдется ориентированное ребро $(x, z) \in D$. В этих терминах граф G называется графом сравнимости, если в нем существует транзитивная ориентация.

   Доказать, что граф сравнимости является совершенным графом, как с помощью теоремы Мирского, так и без нее. Показать эквивалентность теоремы Мирского утверждению о том, что граф сравнимости совершенен.

9. Доказать теорему Дилуорса для частично упорядоченного множества $(P, \preccurlyeq)$ с помощью теоремы о совершенном графе.