

Теория категорий

Сопряженные функторы

Валерий Исаев

6 апреля 2018 г.

Рефлексивные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Рефлексивные подкатегории

- ▶ Пусть \mathbf{C} – полная подкатегория \mathbf{D} . Допустим мы хотим доказать, что вложение $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – эквивалентность.
- ▶ Тогда нам нужно найти для каждого объекта X из \mathbf{D} объект из \mathbf{C} , изоморфный X .
- ▶ Иногда бывает так, что эти категории не эквивалентны, но мы всё же можем найти некоторый объект Y в \mathbf{C} , который является в некотором смысле лучшим приближением к X .
- ▶ Конкретно, должна существовать стрелка $f : X \rightarrow Y$, которая может не быть изоморфизмом, но всё же является в каком-то смысле наилучшей такой стрелкой.

Определение

- ▶ Пусть \mathbf{C} – полная подкатегория \mathbf{D} . Мы говорим, что \mathbf{C} – *рефлексивная* подкатегория \mathbf{D} , если для любого объекта X из \mathbf{D} существует стрелка $f : X \rightarrow Y$, где $Y \in \mathbf{C}$, такая что для любой стрелки $f' : X \rightarrow Y'$, где $Y' \in \mathbf{C}$, существует уникальный морфизм $h : Y' \rightarrow Y$, такой что следующая диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Y' \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

- ▶ Если вместо стрелки $X \rightarrow Y$ существует стрелка $Y \rightarrow X$ с аналогичным универсальным свойством, то категория называется *кореклексивной*.

Примеры

- ▶ Все стрелки в следующей диаграмме являются вложениям рефлексивных подкатегорий:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ab} & \longrightarrow & \mathbf{Grp} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{CMon} & \longrightarrow & \mathbf{Mon} \end{array}$$

- ▶ Например, чтобы по группе G построить соответствующую ей абелеву группу, нужно взять фактор по коммутанту $G/[G, G]$.

План лекции

Рефлексивные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Моноиды и слова

- ▶ Пусть $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории моноидов.
- ▶ Пусть $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ – функтор, сопоставляющий множеству A множество слов в алфавите A .

$$F(A) = \{ [a_1 \dots a_n] \mid a_i \in A \}$$

- ▶ Тогда любая функция $f : A \rightarrow U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма моноидов $g : F(A) \rightarrow B$.
- ▶ У этого соответствия существует обратное, каждому морфизму моноидов $g : F(A) \rightarrow B$ сопоставляющее функцию $f : A \rightarrow U(B)$, $f(a) = g([a])$.
- ▶ Таким образом, существует биекция $\varphi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq \mathit{Hom}_{\mathbf{Mon}}(F(A), B)$.

Векторные пространства и базисы

- ▶ Пусть \mathbf{Vec}_K – категория векторных пространств над полем K .
- ▶ Пусть $U : \mathbf{Vec}_K \rightarrow \mathbf{Set}$ – забывающий функтор.
- ▶ Пусть $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vec}_K$ – функтор, сопоставляющий множеству A векторное пространство с базисом A .

$$F(A) = \{ c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A \}$$

- ▶ Тогда любая функция $f : A \rightarrow U(B)$ уникальным образом доопределяется до линейного преобразования $g : F(A) \rightarrow B$.
- ▶ У этого соответствия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \rightarrow B$ сопоставляющее функцию $f : A \rightarrow U(B)$, $f(a) = g(1a)$.
- ▶ Таким образом, существует биекция $\varphi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq \mathit{Hom}_{\mathbf{Vec}}(F(A), B)$.

Кольца и полиномы

- ▶ Пусть $U : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории колец.
- ▶ Пусть $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ring}$ – функтор, сопоставляющий множеству X кольцо полиномов с переменными в X .
- ▶ Тогда любая функция $f : A \rightarrow U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма колец $g : F(A) \rightarrow B$.
- ▶ У этого соответствия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \rightarrow B$ сопоставляющее функцию $f : A \rightarrow U(B)$, $f(a) = g(1a^1)$.
- ▶ Таким образом, существует биекция $\varphi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq \mathit{Hom}_{\mathbf{Ring}}(F(A), B)$.

Сопряжение

Definition

Сопряжение между категориями \mathbf{C} и \mathbf{D} – это тройка (F, U, φ) , состоящая из функторов $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ и естественного изоморфизма

$$\varphi_{A,B} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, U(B)).$$

В определении φ является естественным изоморфизмом между функторами $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), -)$, $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, U(-)) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм $\varphi_{A,B}$ был естественен по A и B . Таким образом, это были примеры сопряжений.

Уникальность сопряженных функторов

- ▶ Если (F, U, φ) – сопряжение, то пишут $F \dashv U$ и говорят, что F – *левый сопряженный* к U , а U – *правый сопряженный* к F .
- ▶ Если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то F и F' изоморфны.
- ▶ Доказательство: упражнение.
- ▶ Если $F \dashv U$ и $F \dashv U'$, то U и U' изоморфны.
- ▶ Доказательство: по дуальности.

Сохранение (ко)пределов

Proposition

Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.

Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – левый сопряженный к $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$. Пусть $D : J \rightarrow \mathbf{C}$ – некоторая диаграмма в \mathbf{C} . Пусть $L = \operatorname{colim} D$ – копредел этой диаграммы.

Пусть $\alpha : F \circ D \rightarrow X$ – некоторый коконус в \mathbf{D} . Тогда существует уникальная стрелка из L в $G(X)$. По сопряженности она соответствует уникальной стрелке из $F(L)$ в X . Таким образом, $F(L)$ – копредел $F \circ D$. □

План лекции

Рефлексивные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Определение

- ▶ Пусть (F, G) – сопряжение.
- ▶ Тогда $\varphi_{A, F(A)} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(A)) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, GF(A))$.
- ▶ Пусть $\eta_A : A \rightarrow GF(A)$ – естественное преобразование, которое определяется как $\eta_A = \varphi_{A, F(A)}(id_{F(A)})$.
- ▶ С другой стороны
 $\varphi_{G(B), B} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(FG(B), B) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(B), G(B))$.
- ▶ Пусть $\epsilon_B : FG(B) \rightarrow B$ – естественное преобразование, которое определяется как $\epsilon_B = \varphi_{G(B), B}^{-1}(id_{G(B)})$.
- ▶ η_A называется *единицей* сопряжения, а ϵ_B – *коединицей*.

Примеры

- ▶ $\eta_A(a)$ возвращает “одноэлементное слово на букве a ”.
 - ▶ Для категории моноидов $\eta_A(a) = [a]$.
 - ▶ Для категории векторных пространств $\eta_A(a) = 1a$.
 - ▶ Для категории колец $\eta_A(a) = a$ – полином, состоящий из одной переменной a .
- ▶ $\epsilon_B : FU(B) \rightarrow B$ “вычисляет” формальное выражение в B .
 - ▶ Для категории моноидов $\epsilon_B([a_1 \dots a_n]) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.
 - ▶ Для категории векторных пространств $\epsilon_B(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) = c_1 \cdot a_1 + \dots + c_n \cdot a_n$.
 - ▶ Для категории колец ϵ_B определяется аналогичным образом как функция, вычисляющая полином на данных значениях.

Свойства единицы и коединицы

Proposition

Если (F, G, φ) – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:

$$\begin{array}{ccc} G(B) & \xrightarrow{\eta_{GB}} & GFG(B) \\ & \searrow id_{GB} & \downarrow G\epsilon_B \\ & & G(B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F\eta_A} & FGF(A) \\ & \searrow id_{FA} & \downarrow \epsilon_{FA} \\ & & F(A) \end{array}$$

Доказательство

Доказательство.

Условия естественности φ и φ^{-1} можно переписать в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi(f \circ F(h))} & G(C) \\
 \downarrow h & \nearrow \varphi(f) & \downarrow G(g) \\
 B & \xrightarrow{\varphi(g \circ f)} & G(D)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\varphi^{-1}(f' \circ h)} & C \\
 \downarrow F(h) & \nearrow \varphi^{-1}(f') & \downarrow g \\
 F(B) & \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(g) \circ f')} & D
 \end{array}$$

Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при $f = id_{FG(B)}$ и $g = \epsilon_B$. Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при $f' = id_{GF(A)}$ и $h = \eta_A$. □

Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

Proposition

Четверка

$(F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \eta_A : A \rightarrow GF(A), \epsilon : FG(B) \rightarrow B)$,

состоящая из пары функторов и пары естественных

преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в

предыдущем утверждении, определяет сопряжение (F, G, φ) ,

где $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$ для любого $f : F(A) \rightarrow B$,

$\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$ для любого $g : A \rightarrow G(B)$. Единицей и

коединицей этого сопряжения являются η и ϵ соответственно.

Доказательство

Доказательство.

Последнее утверждение элементарно следует из определения φ и φ^{-1} . Докажем, что φ и φ^{-1} взаимнообратны:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\varphi(f)) &= \text{(по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1}) \\ \epsilon_B \circ FG(f) \circ F(\eta_A) &= \text{(по естественности } \epsilon) \\ f \circ \epsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) &= \text{(по свойству } \epsilon \text{ и } \eta) \\ f.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi^{-1}(g)) &= \text{(по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1}) \\ G(\epsilon_B) \circ GF(g) \circ \eta_A &= \text{(по естественности } \eta) \\ G(\epsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ g &= \text{(по свойству } \epsilon \text{ и } \eta) \\ g.\end{aligned}$$

Доказательство

Доказательство.

Осталось доказать, что φ естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$G(g) \circ \varphi(f) = \text{(по определению } \varphi)$$

$$G(g) \circ G(f) \circ \eta_B = \text{(так как } G \text{ – функтор)}$$

$$G(g \circ f) \circ \eta_B = \text{(по определению } \varphi)$$

$$\varphi(g \circ f).$$

$$\varphi(f) \circ h = \text{(по определению } \varphi)$$

$$G(f) \circ \eta_B \circ h = \text{(по естественности } \eta)$$

$$G(f) \circ GF(h) \circ \eta_A = \text{(по определению } \varphi)$$

$$\varphi(f \circ F(h)).$$

План лекции

Рефлексивные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Эквивалентность категорий

- ▶ Если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий, то F одновременно и левый и правый сопряженный.
- ▶ Любой обратный к F будет его правым и левым сопряженным.

Рефлексивные подкатегории

- ▶ Если $i : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – функтор вложения полной подкатегории, то i является правым сопряженным тогда и только тогда, когда \mathbf{C} – рефлексивная подкатегория.
- ▶ Левый сопряженный к i называется рефлексором.
- ▶ Если $F \dashv i$, то $\eta_X : X \rightarrow i(F(X))$ дает нам необходимую аппроксимацию к X в \mathbf{C} .
- ▶ Если \mathbf{C} – рефлексивная подкатегория, то $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ на объектах определяется очевидным образом, а на морфизмах по универсальному свойству.

Определение

- ▶ Декартова категория является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда для любого объекта B функтор $- \times B$ является левым сопряженным.
- ▶ Действительно, правый сопряженный к нему – это функтор $(-)^B$, а коединица сопряжения $\epsilon_C : C^B \times B \rightarrow C$ – это морфизм вычисления ev .
- ▶ Биекция, которая появляется в определении сопряженных функторов, – это в точности биекция каррирования.