

**СПИСОК ВОПРОСОВ К КОЛЛОКВИУМУ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
(предварительная версия)
АУ, четвертый семестр, 2018 год**

1. Голоморфные функции. Свойства. Связь f' с частными производными. Вещественная и комплексная линейность. Условия Коши–Римана. Частные производные $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Функции с постоянной вещественной частью.

2. Два доказательства теоремы Коши о дифференциальной форме $f(z) dz$.

3. Следствие из теоремы Коши. Модификация теоремы Коши о дифференциальной форме $f(z) dz$.

4. Индекс кривой относительно точки. Интегральная формула Коши.

5. Аналитичность голоморфной функции. Следствия.

6. Теорема Мореры. Следствия. Теорема об интеграле от $\frac{f(z)}{z-a}$. Условия, равносильные голоморфности.

7. Неравенство Коши. Теорема Лиувилля.

8. Основная теорема алгебры. Теорема о среднем.

9. Лемма про открытое и замкнутое подмножество. Теорема единственности голоморфной функции (с производными).

10. Теорема о среднем. Следствие. Принцип максимума. Следствия.

11. Кратность нуля. Множество нулей голоморфной функции. Теорема единственности голоморфной функции.

12. Аналитическое продолжение функции. Полная аналитическая функция.

13. Продолжение с помощью степенных рядов. Существование особой точки на границе круга сходимости.

14. Теорема о существовании логарифма голоморфной функции. Логарифм. Полная аналитическая функция $\text{Ln } z$ и ее свойства. Следствия.

15. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Единственность.

16. Ряд Лорана. Существование. Разложение голоморфной в кольце функции в сумму голо-

морфных функций.

17. Особые точки голоморфных функций. Равносильные определения устранимой особой точки.

18. Характеристика полюса. Связь между нулями и полюсами.

19. Характеристика существенной особой точки. Мероморфные функции. Свойства. Производные мероморфных функций.

20. Бесконечный предел и бесконечно удаленная точка. Особенности в бесконечно удаленной точке.

21. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Связь между расстояниями образов и прообразов. Теорема Лиувилля в $\bar{\mathbb{C}}$.

22. Теорема Сохоцкого. Формулировка теоремы Пикара.

23. Вычеты. Определения и свойства.

24. Теорема о вычетах. Сумма вычетов. Вычисление интеграла $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{2n} + 1}$.

25. Лемма Жордана. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + 1} dx$.

26. Лемма о полувывчете. Интеграл в смысле главного значения. Вычисление интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

27. Вычисление интеграла $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1} dx$.

28. Две теоремы о разложении мероморфной функции в сумму.

29. Разложение котангенса в ряд и синуса в бесконечное произведение.

30. Вычисление сумм рядов (общая схема). Пример с рядом из обратных квадратов.

31. Теорема о числе нулей и полюсов.

32. Теорема Руше.

33. Диагонализация степенных рядов и произведение Адамара.

34. Метод Дарбу.

ПРИМЕЧАНИЯ

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения точной и замкнутой формы, гомотопных путей, голоморфной функции; условия Коши–Римана; интегральной формулы Коши; теоремы Лиувилля; теорем единственности; ряда Лорана; классификации и характеристики особых точек; теоремы о вычетах.

Начало курса примерно в таком же изложении можно найти в книге Картана “Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных”, часть примеров взята из книги Лаврентьева и Шабата “Методы теории функций комплексного переменного”, еще часть из книги Грина и Кнута “Математические методы анализа алгоритмов”.