DL 45. Найдите максимальное число среди $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.

DL 46. Докажите, что число способов разбить число n на не более, чем k слагаемых совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, не превосходящие k. В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

DL 47. Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n-угольнике.

DL 48.

а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ шагами $(1,1)$ и $(1,-1)$?

б) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.

в) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n.

г) Покажите, что $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 49. Сколько существует способов разбить выпуклый n-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?

DL 50. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0,1,2\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0,1\}$.

DL 51. Задайте биекцию между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ с помощью многочлена с рациональными коэффициентами.

DL 52. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0,1\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

DL 28. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 32. Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух n-битных чисел размера $O(n^2)$ и глубины $O(\log n)$.

DL 33. Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0,1\}^{2k+1} \to \{0,1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k+1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

DL 39. На множестве $\mathbb{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S,=)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

DL 44. Докажите, что:

а) число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равна $\binom{n-1}{k-1}$;

б) число способов разбить число n ну сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Порядок слагаемых имеет значение.