Компьютерное зрение '2014

Who? Александр Вахитов

When? November 1, 2014

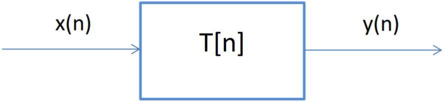
План лекции

Импульсная характеристика

Системы обработки сигналов

Общий вид

$x(n), y(n)$ - последовательности, $n \in \mathbb{N}$



Дискретизация сигнала

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty.$$

Дискретизация двумерного сигнала

$$I[i,j] = I_a(iS_i, jS_j), \quad -\infty < i,j < \infty.$$

Линейная стационарная система

Определение

$$1)\quad T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}.$$

$$2)\quad T\{x[n]\} = y[n] \implies T\{x[n-k]\} = y[n-k].$$

$$\forall k \ T(x_k[n]) = y_k[n] \implies T(\sum_k a_k x_k[n]) = \sum a_k y_k[n]$$

Определите линейную систему для изображений - самостоятельно

Единичное возмущение

Обработка изображений: белая точка

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq 0, \\ 1, & \text{n = 0.} \end{cases} \quad (1)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

$$I_\delta[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq 0 \text{ или } j \neq 0, \\ 1, & \text{i = j = 0.} \end{cases} \quad (2)$$

Импульсная характеристика $h[n]$

Определение

Импульсная характеристика - реакция системы на единичный импульс:

$$h[n] = T(\delta[n])$$

Пример

$$y[n] = x[n] \implies$$

Импульсная характеристика $h[n]$

Определение

Импульсная характеристика - реакция системы на единичный импульс:

$$h[n] = T(\delta[n])$$

Пример

$$y[n] = x[n] \implies$$

$$h[n] = \delta[n].$$

Импульсная характеристика $h[n]$

Определение

Импульсная характеристика - реакция системы на единичный импульс:

$$h[n] = T(\delta[n])$$

Пример

$$y[n] = x[n] \implies$$

$$h[n] = \delta[n].$$

$$y[n] = x[n-1] - x[n-2] \implies$$

Импульсная характеристика $h[n]$

Определение

Импульсная характеристика - реакция системы на единичный импульс:

$$h[n] = T(\delta[n])$$

Пример

$$y[n] = x[n] \implies$$

$$h[n] = \delta[n].$$

$$y[n] = x[n-1] - x[n-2] \implies$$

Импульсная характеристика $h[n]$

Определение

Импульсная характеристика - реакция системы на единичный импульс:

$$h[n] = T(\delta[n])$$

Пример

$$y[n] = x[n] \implies$$

$$h[n] = \delta[n].$$

$$y[n] = x[n-1] - x[n-2] \implies$$

$$h[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2].$$

Импульсная характеристика $h[n]$

Определение

Импульсная характеристика - реакция системы на единичный импульс:

$$h[n] = T(\delta[n])$$

Пример

$$y[n] = x[n] \implies$$

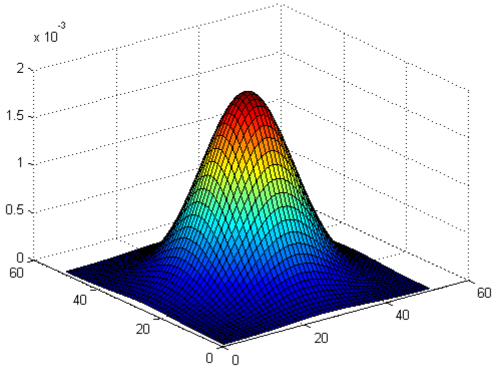
$$h[n] = \delta[n].$$

$$y[n] = x[n-1] - x[n-2] \implies$$

$$h[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2].$$

Функция размытия точки

ФРТ - импульсная характеристика для двумерного сигнала (реакция на белую точку)



Фильтр как свертка с импульсной характеристикой

Входной сигнал как свертка с δ:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Для линейной стационарной системы:

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n].$$

Фильтр как свертка с импульсной характеристикой для изображения

Рассмотрим линейную модель оптической системы
$I_i[i, j]$ - идеальное изображение
$I_b[i, j]$ - смазанное изображение
$B[i, j]$ - ядро смаза, то есть функция размытия точки оптической системой

$$I_b[u, v] = I_i * B = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_i[i, j] B[u - i, v - j]$$

Гармонический сигнал

$$e^{j\omega n} = cos(\omega n) + jsin(\omega n)$$

Пусть $\omega = \frac{2\pi}{N}$, тогда N - период, ω - частота

$$e^{j(\omega_x u + \omega_y v)} = (cos(\omega_x u) + jsin(\omega_x u)) \times$$

$$\times (cos(\omega_y v) + jsin(\omega_y v)) = \ldots$$

Какой ответ?

Амплитудно-частотная характеристика

Подадим на вход системы гармонический сигнал $e^{j\omega n}$. Получим:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}).$$

Определение

Амплитудно-частотная характеристика:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}.$$

Отсюда:

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Свойства АЧХ

1
$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}),\ r \in \mathbb{Z}.$$

2
$$|H(e^{j\omega})| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \implies |H(e^{j\omega})| < \infty.$$

Первое свойство АЧХ: кратные частоты

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega})$$

Например,

$$H(e^{j\frac{2\pi}{8}}) = H(e^{j\frac{2\pi}{8}+2\pi})$$

Переход от $n = 0$ к $n = 1$

$sin(\frac{2\pi}{8}n)$ - $\frac{1}{8}$ часть периода
$sin(\frac{18\pi}{8}n)$ - $1\frac{1}{8}$ часть периода

Неотличимость частоты для дискретной гармонической функции

$sin(\frac{2\pi}{8T}t) \neq sin(\frac{18\pi}{8T}t)$ при $t \in \mathbb{R}$, но
$sin(\frac{2\pi}{8T}nT) = sin(\frac{18\pi}{8T}nT)$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье сигнала - то же, что АЧХ фильтра

Преобразование Фурье сигнала $x[n]$ - функция $X(e^{j\omega})$ непрерывной переменной ω:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Получается тоже:

$$X(e^{j(\omega+\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

Свойство 1. Для $x[n] \in \mathbb{R}$,

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

(Очевидно)
Отсюда, $\forall\omega\exists\omega' \in (0, \pi) : |X(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega'})|$.

Наложение частот при дискретизации

Пусть есть непрерывный сигнал и его ПФ $X(e^{-j\omega})$, определяемое по аналогии

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Пусть он дискретизирован с шагом T (частота дискретизации $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$):

$$x[n] = x(Tn)$$

Тогда непрерывной частоте ω соответствует дискретная частота $\frac{\omega}{T}$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(Tn) e^{-j\omega n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\frac{\omega}{T} t} dt$$

Наложение частот при дискретизации (2)

Итак, дискретная частота ω это непрерывная $\frac{\omega}{T}$
Вспомним, что для $x[n] \in \mathbb{R}\ \forall\omega\exists\omega' \in (0, \pi)$: $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega'})|$. Тогда получается, что для некоторой непрерывной частоты $\omega_c = \frac{\omega_x}{T} > \frac{\pi}{T}$, ее дискретный эквивалент $\omega_x > \pi$ и поэтому совпадает с дискретным эквивалентом

$$\omega_c' = \frac{\omega_x - \pi}{T}.$$

Если же есть гарантия, что при $\omega_c > \frac{\pi}{T}$ $X(j\omega_c) = 0$, то *наложения частот* не происходит.

Наложение частот в обработке изображений: эффект муара

Для изображений, можно представить себе частоту, период которой меньше размера пикселя.

Что будет, если получить такую частоту на матрице камеры и дискретизировать в точках центров пикселей?

Подобный эффект достигается при уменьшении разрешения изображений.

Для его предотвращения используют фильтр нижних частот.

В камере, усреднение света по площади пикселя играет роль такого фильтра.

Теорема о свертке

Преобразование Фурье от свертки $x[n] * h[n]$ есть произведение преобразований Фурье от сворачиваемых сигналов $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

Идея доказательства

$$e^{j\omega n} \to H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Преобразование Фурье: варианты

Прямое:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Обратное:

$$x[k] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega$$

Дискретное размерности N:

$$X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Для сигнала длины N, запишите обратное дискретное размерности N.