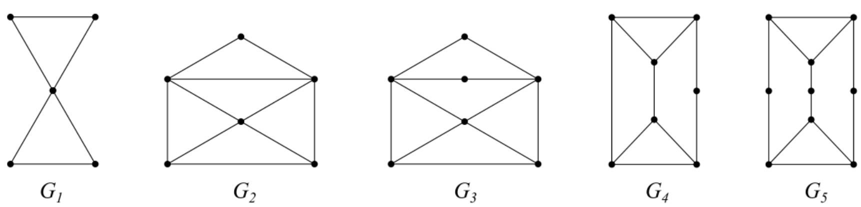
Листочек 22.09.2017

1. Вывести формулу для подсчета общего количества простых циклов в полном графе K_n.

2. Кубик сыра размерами $3 \times 3 \times 3$ разделен на 27 кубиков единичного объема. Мышь съедает по кубику в день, начиная с углового кубика. При этом на $(i+1)$-й день она съедает один из кубиков, смежных (то есть разделенных гранью) со съеденным кубиком сыра в i-й день. Может ли мышь съесть последним центральный кубик при таком способе поедания сыра?

3. Построить граф на пяти вершинах, имеющий в точности a) 1 цикл, b) 3 цикла, c) 6 циклов, d) 22 цикла, e) 13 циклов, f) 12 циклов.

4. Среди графов G_i, показанных на рисунке, указать графы, в которых гамильтоновы циклы существуют, а также графы, в которых таковые отсутствуют. Привести доказательство гамильтоновости или негамильтоновости соответствующих графов.



5. Доказать, что для шахматной доски размерами 3×6 невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

6. Доказать, что в случае шахматной доски размерами $4 \times n$ невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

7. Доказать существование гамильтонова цикла в k-кубе Q_k. Подсчитать количество таких гамильтоновых циклов.

8. Доказать, что любой турнир T либо сильно связный, либо может быть превращен в таковой изменением ориентации только лишь одного ребра.

9. Доказать, что любой сильно связный турнир T, построенный на n вершинах, содержит циклы длины $3, 4, \ldots, n$. Следствием этого утверждения является, в частности, тот факт, что в любом сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

10. Доказать, что среди $n > 3$ вершин сильно связного турнира T найдутся по крайней мере две вершины x, такие, что орграф $T - x$ остается сильно связным.