2) Теперь, заметим, что во всех рассмотренных выше примерах в качестве мн-ва помеченных объектов мы рассматривали, на самом деле, различные мн-ва отобр-й $f: \tilde{X} \to Y$. Так,

а) Так, в задаче раскраски правильного n-угольника ровно в n цветов в качестве помеченных объектов мы рассматривали все биективные отобр-я. Их количество, очевидно, $= n!$

б) Далее, в задачах окраски вершин правильного n-угольника в $\leq k$ цветов мы в качестве мн-ва помеченных объектов имели мн-во всевозможных отобр-й $f: \tilde{X} \to Y$, число которых равно $|Y|^{|\tilde{X}|} = k^n$. В этой связи, кстати говоря, мн-во всех отобр-й $f: \tilde{X} \to Y$ обозначают обычно через

$$Y^{\tilde{X}} = X$$

в) Теперь, можно было бы рассматривать и задачу об окраске вершин правильного n-угольника ровно в k цветов $\Rightarrow$ в этом случае кол-во помеченных объектов, очевидно, $= \hat{S}(n,k)$.

г) Наконец, можно, в принципе, рассматривать и задачу о раскраске, например, вершин квадрата в 50 цветов так, чтобы цвета не повторялись $\Rightarrow$ имели бы $(k)_n$ помеченных объектов.

Таким образом, мы, в завис. от вида ф-ции, можем более четко формулировать нашу задачу

3) Почему этот формализм так удобен? Да потому, что группа G, как правило, изначально действует на (гораздо ~~в~~ меньшем) мн-ве $\widetilde{X}$ – рассматриваемого геом. объекта Г
мн-ве вершин, граней и т.д. Зная действие G на $\widetilde{X}$, можно достаточно естественно задать действие и на мн-ве $X = Y^{\widetilde{X}}$ всех отображ-й $f: \widetilde{X} \to Y$. Именно, $\exists\ \circ: G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$
действие G на этих мн-ва $\widetilde{X}$, т.е. на этих конечных геом. фигуры Г.

По опр-ию,

$$g \circledast f \in Y^{\widetilde{X}} \iff (g \circledast f)(x) \overset{def}{:=} f(g^{-1} \circ x)$$

Почему именно такое определение? Дело в том, что мы должны обеспечить выполнение св-ва асс-ти действия $\circledast$

$$g \circledast (h \circledast f) = (g \cdot h) \circledast f.$$

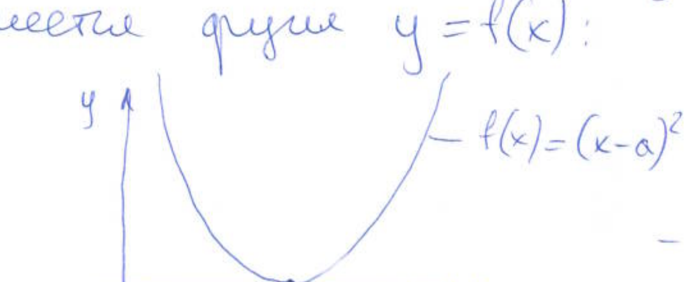
Так вот, данное выше опр-ие как раз ~~так~~ и обеспечивает выполнение этого св-ва:

$$\big(g \circledast (h \circledast f)\big)(x) \overset{def}{=} (h \circledast f)(g^{-1} \circ x) \overset{def}{=} f\big(h^{-1} \circ (g^{-1} \circ x)\big) =$$

$$= f\big((h^{-1} \cdot g^{-1}) \circ x\big) = f\big((g \cdot h)^{-1} \circ x\big) \overset{def}{=} \big((g \cdot h) \circledast f\big)(x)$$

Заметим, кстати, что такое определение довольно естественно: $\exists$ имеется ф-ция $y = f(x)$:

$\Longrightarrow$



тогда $y = f(x-a) = (x-a)^2$ есть сдвиг ф-ции $f(x)$ как целого на расстояние, равное a, вправо

Кстати, этот пример – это также пример действия – действие группы трансляций на мн-ве ф-ций $f(x)$.

Теперь: а что на этом языке есть эл-ты $f_1 \sim f_2$, т.е. эл-ты, принадлежащие одной и той же орбите? По опр-ию, $f_1 \sim f_2 \iff \exists g \in G: \ f_1(x) = f_2(g^{-1} \circ x) \ \forall x \in X.$

4) Теперь переформулируем лемму Бернсайда на языке отображений $f: \widetilde{X} \to Y$. Элементы f мн-ва $X = Y^{\widetilde{X}}$, остающиеся неподвижными под действием элемента $g \in G$ — это все те отобр-ия, для которых

$$g \circledast f = f \iff (g \circledast f)(x) = f(g^{-1} \circ x) = f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для подсчета кол-ва орбит необходимо для $\forall g \in G$ сосчитать кол-во функций $f: \widetilde{X} \to Y$, таких, что

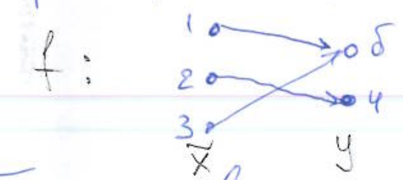
$$\boxed{f(g^{-1} \circ x) = f(x) \quad \forall x \in X} \qquad (*)$$

---

5) Пример: давайте переформулируем на этом языке решение задачи о подсчете геометрически различных способов окраски вершин правильного Δ-ка в ≤ 2 цвета

Здесь Γ — это правильный Δ-к; $\widetilde{X}$ — мн-во его помеченных вершин, $|\widetilde{X}| = 3$; $G = D_3$.

а) $\forall$ раскраска здесь — это $\forall$ функц. $f: \widetilde{X} \to Y$ вида



$Y = \{б, ч\}$; $f \in X = Y^{\widetilde{X}}$

б) Тождественная перестановка $e \in D_3$ с цикловым типом a_1^3: $\forall$ функц. $f \in Y^{\widetilde{X}}$ удовл-ет условию $f(e^{-1} \circ x) = f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ имеем 2^3 таких функц.

в) Вращения $a, b \in G$ на $120°$ и $240°$, имеющие цикловой тип a_3^1: только 2 функц.

удовл-ют св-ву $(*)$ $\Rightarrow$ имеем $2^1 + 2^1$ таких функц.

г) Отражения c, d, f относит. осей, прох. через т. 1, 2, 3 (цикловой тип $a_1 \cdot a_2$):
для $c \in D_3$: добавляются еще 2 функц.

$\Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow$ всего $|X/G| = \frac{1}{6}(2^3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2$

6) Теперь, вспомним о нашем наблюдении, состоящим в том, что все элементы $\sigma_g \in S_n$ (σ_g – образ $g \in G$ при гом-изме из G в S_n), имеющие одинаковое количество i циклов, дают одинаковый вклад в сумму $\sum_{g \in G} |(Y^X)^g|$, а именно, $|Y|^i = k^i$. (действительно, $\forall$ из i циклов м.б. покрашен в $\forall$ из k цветов, и действие g на таком эл-те эту раскраску сохранит).

Как следствие, лемма Бернсайда для этой формулировки м.б. переформулирована с.о.: Точнее говоря, (Ведь нам нужно обеспечить выполнение условия $f(g^{-1}x) = f(x)$ т. и т. т. к. $f = const$ на $\forall$ цикле $\sigma_g \in S_n$, где σ_g – образ $g \in G$ при гомом-зме $G \to S_n$, $n = |X|$)

$f(g^{-1}x) = f(x) \Leftrightarrow$ $\Rightarrow f = const$ на эл-тах $\forall$ цикла перестановки $\sigma_g \in S_n$

$$\boxed{|Y^X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(G) \cdot |Y|^i}$$

где $c_i(G)$ – это количество эл-тов $\sigma_g \in S_n$, чей цикловой тип содержит ровно i циклов. (т.е. эл-тов $g \in G$, чьи образы $\sigma_g \in S_n$ при гом-изме $G \to S_n$ ~~имеют~~ содержат ровно i циклов)

---

7) Наконец, вспоминая, что всю информацию о цикловом типе элементов g группы G содержит цикловой индекс $Z(G)$ группы G, мы можем последнее утверждение переписать с.о.:

$\exists$ $$Z(G) = Z(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_1^{z_1(g)} \cdot \ldots \cdot a_n^{z_n(g)},$$

где $n = |X|$, $1 \cdot z_1(g) + 2 \cdot z_2(g) + \ldots + n \cdot z_n(g) = n \quad \forall g \in G$,

$z_i(g)$ – кол-во циклов длины i в перестановке $\sigma \in S_n$, являющейся образом $g \in G$ при гомоморфизме $G \to S_n$.

Тогда

$$\boxed{|Y^X/G| = Z_G(k, \ldots, k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{z_1(g) + \ldots + z_n(g)} \qquad k = |Y|,\ n = |X|}$$

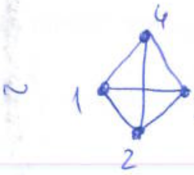
3. Рассмотрим чрезвычайно важное приложение полученных результатов – подсчет числа всех непомеченных графов на n вершинах.

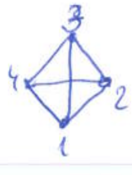
1) $\exists$ V – это мн-во n вершин графа; $V=\{1,\dots,n\}$.
Введем мн-во X всех $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ возможных ребер этого графа. Тогда $\forall$ граф на n вершинах можно

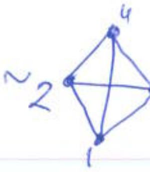
а) либо рассматривать как $\forall$ подмн-во этого мн-ва X $\Rightarrow$ имеем $2^{\binom{n}{2}}$ всех помеченных графов

б) либо граф, все $\binom{n}{2}$ ребра которого окрашены в ≤ 2 цвета: черный (ребро $\exists$) или белый (ребро $\nexists$).

2) Теперь: группа G симметрий графа – это группа S_n перестановок всех n вершин:

$e \sim$ 

; $a \sim$ 

$=(1234)$; $\sigma_1 \sim$ 

$=(12)(3)(4)$ и т.д.

Она действует на мн-ве ребер X графа; образ $G=S_n$ при гом-изме G в $S_{\binom{n}{2}}$ обозначается обычно $S_n^{(2)}$. Оказывается, $S_n^{(2)} \cong S_n$. Задача – сосчитать цикловой индекс $S_n^{(2)}$.

3) Напомним, что цикловой индекс группы S_n равен

$$Z(S_n)=\sum \frac{1}{k_1!\dots k_n!}\left(\frac{a_1}{1}\right)^{i_1}\dots\left(\frac{a_n}{n}\right)^{i_n}, \quad 1i_1+2i_2+\dots+n i_n=n.$$

Действительно, возьмем $\forall$ перестановку σ, имеющую i_1 циклов длины 1, i_2 циклов длины 2, ..., i_n циклов длины n. Сколько еще в S_n $\exists$ перестановок того же циклового типа?

а) Возьмем нашу перестановку σ и переставим в ней эти всеми $n!$ возможными способами. Имеем

2 причины, по которым не все из них будут различными

б) <u>1я причина</u>: для $\forall$ цикла длины K: имеется K ~~одинаково~~ переходящих друг в друга варта расположения чисел в этом цикле $\Rightarrow$ $\dfrac{n!}{1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdots n^{k_n}}$

в) <u>2я причина</u>: кроме того, ~~...~~ циклы заданной длины неразличимы $\Rightarrow$ имеется $k_1!$ вартов расположения циклов длины 1, $k_2!$ -//- длины 2, ... $\Rightarrow$

$$\frac{n!}{k_1!\cdot 1^{k_1}\cdots k_n!\, n^{k_n}} \Rightarrow \text{деля на } n!, \text{ получаем...}$$

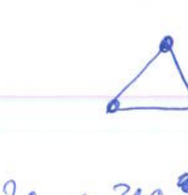
---

4) Перейдем теперь к описанию действия S_n на мн-ве ребер $\tilde{X}$.

а) В случае $n=3$: $S_3 \cong D_3 \cong S_3^{(2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow Z(S_3^{(2)}) = \frac{1}{6}\left[a_1^3 + 2a_3 + 3a_1a_2\right]$. Причина: для полного графа K_3 дуальный к нему граф совпадает с K_3.

$\Rightarrow$ имеем $\frac{1}{6}\left[2^3 + 2^2 + 3\cdot 2^2\right] = 4$ различных неизоморф. графа на 3х вершинах

б) В случае $n=4$: 

1. Единичный эл-т $e \in S_4$ (цикл. типа a_1^4) оставляет все $\binom{4}{2} = 6$ ребер на месте $\Rightarrow$ цикловой индекс <u>образа</u> этого эл-та в $S_{\binom{4}{2}} = S_6$ есть a_1^6

2. Теперь: имеется 6 перестановок $\sigma \in S_4$ (типа $a_1^2a_2$), меняющие ~~...~~ местами лишь 2 вершины: $(12)(3)(4)$; (13); (14); (23); (24); (34).

$\forall$ из этих перестановок: не меняет ребро, соединяющее эту пару вершин, $\oplus$ ~~...~~ ребро, соединяющее оставшуюся пару ($\Rightarrow a_1^2$) но:

меняет местами ребра, выходящие из 1 и 3 на 2 и 3 и наоборот ⇒ a_2^2 ⇒ всего $6\,a_1^2a_2^2$.

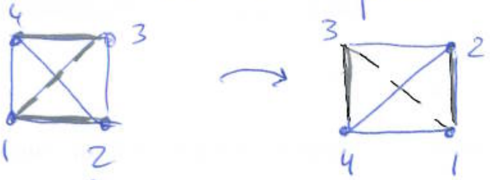
$3a_2^2$

3. Далее, 3 перестановки типа ((12)(34); (13)..; (14)...

Вновь не меняются ребра, соединяющие 2 вершины в цикл ⇒ $3\,a_1^2a_2^2$ ⇒ всего $9\,a_1^2a_2^2$

4. Теперь, 8 перестановок вида a_1a_3, т.е. (1)(234), (1)(243), ...: они три ребра в цикле не меняют, а 3 ребра, идущие в т. 1, циклически переставляют ⇒ $8\,a_3^2$.

5. Наконец, 6 перестановок типа a_4:



они циклически переставляют 4 ребра, входящих в цикл, и переставляют 2 диагональных ⇒ $a_4^1\cdot a_2^1$.

6. Т.о. окончательно имеем

$$Z(S_4^{(2)}) = \frac{1}{24}\cdot\left[a_1^6+9a_1^2a_2^2+8a_3^2+6a_4^1a_2^1\right]$$

7. Т.о. всего имеем

$$\frac{1}{24}\left[2^6+9\cdot2^4+8\cdot2^2+6\cdot2^2\right] = \frac{1}{3}\left[8+18+4+3\right] = \frac{33}{3} = 11$$

различных непомеченных графов на 4х вершинах.

в) Это для общего случая n приведено, например, у Харари и Палмера — стр. 108.