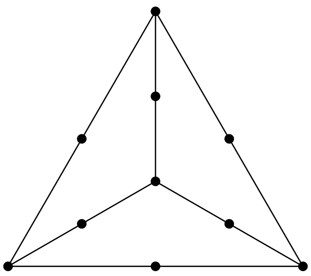
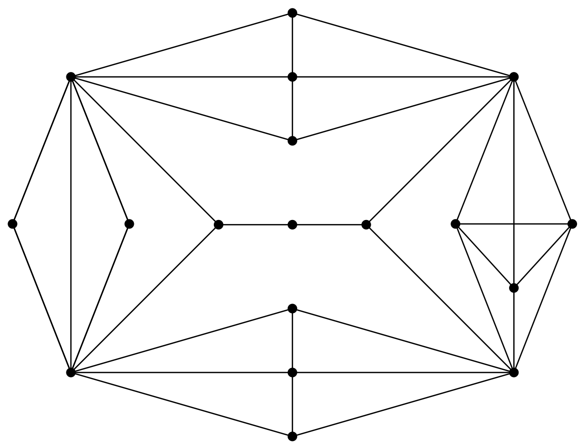
Паросочетания в графах

Практика

17 ноября 2017 г.



(a) Граф G_1



(b) Граф G_2

Рис. 1

1. (1 балл). Доказать с помощью теоремы Татта, что в изображенных на рис.**??** графах G_1, G_2 совершенное паросочетание отсутствует.

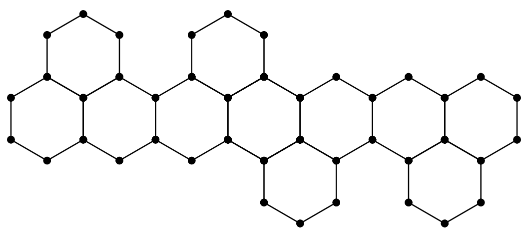


Рис. 2: Граф G

2. (1 балл). Доказать с помощью теоремы Татта, что в изображенном на рис.**??** графе G совершенное паросочетание отсутствует.
3. (1 балл). Доказать, что k-куб Q_k имеет совершенное паросочетание для любого $k \geqslant 1$.
4. (1.5 балла). Показать, что в кубе Q_k найдется по меньшей мере $2^{2^{k-2}}$ совершенных паросочетаний для всех $k \geqslant 2$.

5. (1 балл). Подсчитать количество совершенных паросочетаний в кубе Q_3.

6. (1.5 балла). Обозначим через G_n граф, построенный на $2n$ вершинах $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$, и имеющий ребра вида $\{x_i, x_{i+1}\}$, $\{y_i, y_{i+1}\}$, а также $\{x_i, y_i\}$. Подсчитать количество совершенных паросочетаний в таком графе.

7. (2 балла). Подсчитать количество совершенных паросочетаний в графе Петерсена.

8. (1 балл). Пусть G — граф, в котором все вершины имеют нечетную степень. Предположим, что в графе G существует совершенное паросочетание M. Доказать, что такое паросочетание обязано включать любой мост в графе G.

9. (2 балла). Пусть G есть k-регулярный граф, построенный на четном количестве вершин, остающийся связным при удалении любых ребер в количестве $k-2$ штук. Доказать, что в таком графе существует совершенное паросочетание (теорема Плесника).

10. (1 балл). Пусть G есть связный $2k$-регулярный граф с чётным числом рёбер. Доказать, что G имеет k-фактор.

11. (1.5 балла). Доказать, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, допускает декомпозицию на пути длины 3.