Задача о рюкзаке.

Рюкзак макс веса W

Множество товаров: $g_1 \dots g_n$: $w_1 \dots w_n$ веса

$v_1 \dots v_n$ ценности

1. Непрерывный рюкзак.

Посчитать удельную ценность: $\frac{v_i}{w_i}$

Жадный алгоритм.

2. Дискретный рюкзак

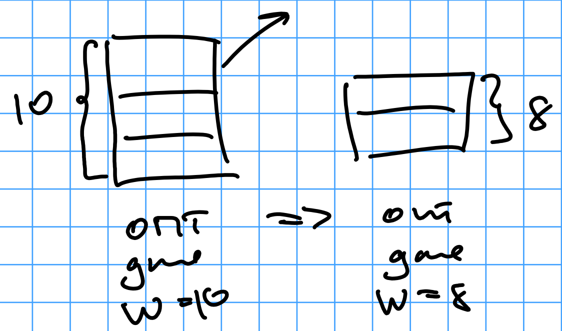
$W = 10$

1	$\frac{W}{2}$	$\frac{W}{2}$
10	20	20

— с повторениями

W, $w_1 \dots w_n$

$v_1 \dots v_n$



$V[i]$ — макс. ценность рюкзака веса i

$$V[i] = \max_{\substack{k=1..n \\ w_k \leq i}} \{ V[i-w_k] + v_k \}$$

$V[0] = 0$

$O(W \cdot n)$

$2^{|W|}$

Память $O(W)$

— без повторений

$V[i, j]$ — макс. ценность рюкзака веса i сост. из товаров $1..j$

$$V[i,j] = \max \{ V[i-w_j, j-1] + v_j , V[i, j-1] \}$$

$\forall i,j: V[i,0] = V[0,j] = 0$ $O(n \cdot W)$

Память $O(W)$

Умножение матриц

$A \times ((B \times C) \times D)$

$(n \times m) \times (m \times k)$

$\Downarrow$

$n \times k$

за $O(n \cdot m \cdot k)$

Пример:

A 10×100

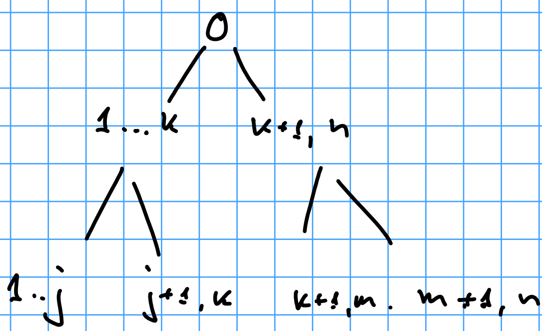
B 100×20

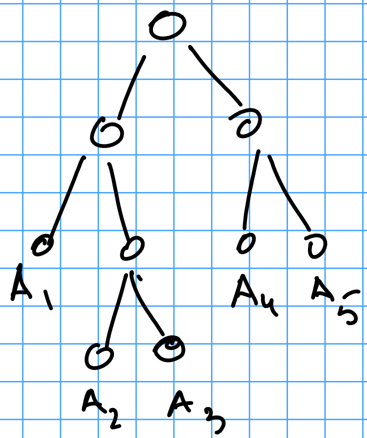
C $20 \cdot 1$

$(A \times B) \times C$, 10×20: $20000 + 200 = 20200$

$A \times (B \times C)$, 100×1: $2000 + 1000 = 3000$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$$





$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times (A_4 \times A_5)$

$C[i,j]$ – опт. # умнож. $(A_i \times \dots)(\dots \times A_j)$?

Матрицы $A_1 \dots A_n$

Размеры $(m_0 \times m_1)$ (m_{n-1}, m_n)

$$C[i,j] = \min_{k=i..j-1} \{C[i,k] + C[k+1,j] + m_{i-1} \cdot m_k \cdot m_j\}$$

$O(n^3)$ Память $O(n^2)$

$$(A_i \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_j)$$

Основные типы подзадач:

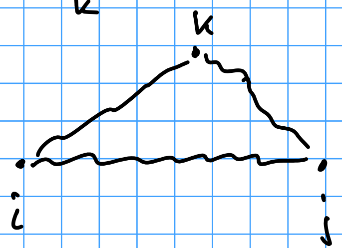
- $\boxed{\boxed{\boxed{a_1}\ a_2}\ a_3} \ldots a_n$ $C[i]$
- $a_1\ \boxed{a_2\ \boxed{a_3 \ldots}}\ a_n$ $C[i,j]$
- $\boxed{a_1\ a_2\ a_3} \ldots a_n$ / $\boxed{b_1\ b_2} \ldots b_m$ $C[i,j]$

Кратчайшие расстояния от всех вершин

1. $|V|$ раз вызвать Беллмана-Форда

$$O(V^2 E) \sim O(V^4)$$

$$d[i,j] = \min_k \{d[i,k] + d[k,j]\}$$



Идея: Подзадачи: кратчайший путь длины $\le l$

$d[i,j,k]$ — кратчайший путь от i до j, проходящий ч/з вершины $1..k$

$$d[i,j,k] = \min\{d[i,j,k-1],\ d[i,k,k-1] + d[k,j,k-1]\}$$

for i, j : $d[i,j,0] = \infty$

for $i = 1..n$: $d[i,i,0] = 0$

for $(i,j) \in E$: $d[i,j,0] = w_{ij}$

```
for k = 1..n:
  for i = 1..n:
    for j = 1..n:
      d[i,j,k] = min(d[i,j,k-1], d[i,k,k-1] + d[k,j,k-1])
```

$O(V^3)$

Память: $O(V^2)$

Алгоритм Флойда - Уоршалла.