

Листочек 06.04.2018

1. Доказать, что количество путей на плоскости, выходящих из начала координат, приходящих в точку с координатами (n, n) , состоящих из отрезков $(0, 1)$ и $(1, 0)$, и не поднимающихся выше диагонали $x = y$, описывается числами Каталана.
2. Установить биекцию между множеством плоских бинарных корневых деревьев, построенных на n вершинах, и множеством правильных скобочных последовательностей длины $2n$, доказав, тем самым, что количество таких деревьев равно числу Каталана C_n .
3. Установить биекцию между всеми триангуляциями выпуклого $(n+2)$ -угольника и плоскими корневыми бинарными деревьями, построенными на n вершинах. Изобразить эту биекцию на рисунке для одной из конкретных триангуляций выпуклого шестиугольника.
4. Разбиение π множества $[n]$ на блоки $\beta_1, \dots, \beta_k$ называется непересекающимся, если не существует никакой четверки линейно упорядоченных чисел

$$1 \leq a < b < c < d \leq n,$$

такой, что $a, c \in \beta_i$, а $b, d \in \beta_j$ для некоторых блоков β_i и β_j разбиения π . Выписать все непересекающиеся разбиения множества $[3]$. Доказать, что количество таких разбиений описывается числами Каталана C_n .

5. Наряду с триангуляциями можно рассматривать произвольные рассечения правильного многоугольника хордами, которые могут пересекаться лишь в вершинах этого многоугольника. Например, существует три рассечения квадрата — пустое рассечение (без хорд) и два рассечения на пару треугольников, отличающихся тем, какая из диагоналей в этом квадрате была проведена. Пусть S_n — количество рассечений $(n+1)$ -угольника. Последовательность $\{S_n\}$ называется последовательностью малых чисел Шрёдера. Вывести для неё рекуррентное соотношение.
6. Рассмотрим множество путей, исходящих из точки с координатами $(0, 0)$, приходящих в точку с координатами $(n, 0)$, состоящих из отрезков $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 0)$, и нигде не опускающихся ниже оси абсцисс. Такие пути называются путями Моцкина. Вывести рекуррентное соотношение для подсчета количества M_n всех таких путей.
7. Используя прямые комбинаторные соображения, доказать, что

$$M_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_k \binom{n}{2k},$$

где C_k — числа Каталана. Используя прямые комбинаторные соображения, доказать, что

$$M_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_k \binom{n}{2k},$$

где C_k — числа Каталана.