

## Домашнее задание

20 сентября 2013 г.

**1** Пусть  $A$  есть матрица смежности графа  $G$ . Показать, что элемент  $a_{i,j}^k$ ,  $k$ -й степени матрицы  $A$  определяет количество путей длины  $k$  из вершины  $i$  в вершину  $j$ .

**2** Доказать, что в определении связности двух вершин можно вместо понятия пути использовать как понятие маршрута, так и понятие простого пути.

**3** Пусть в графе  $G$  ровно две вершины имеют четную степень. Доказать, что в они являются связанными.

**4** Доказать или опровергнуть следующее утверждение: объединение двух различных маршрутов, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

**5** Доказать или опровергнуть следующее утверждение: объединение двух различных простых путей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

**6** Доказать, что в простом графе, содержащем  $m \geq (n - 1)$  ребер, существует как минимум  $m - n + 1$  циклов.

**7** В теории было доказано, что любой граф на  $n$  вершинах, имеющий меньше  $(n - 1)$ -го ребра, обязательно является несвязным. В случае, когда  $|E(G)| \geq (n - 1)$ , граф  $G$  может быть как связным, так и несвязным. Сколько ребер должен иметь простой граф на  $n$  вершинах, чтобы он гарантированно был связным?

**8** Введем несколько чрезвычайно полезных понятий.

**Определение 1** Корневым деревом называется дерево с выделенной вершиной, называемой корнем. Корневым лесом называется лес, каждая компонента связности которого представляет собой корневое дерево.

Доказать, что количество корневых лесов, построенных на  $n$  вершинах, равно  $(n + 1)^{(n-1)}$ .

**9** Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.