19 октября 2017

Количество баллов на зачет: *8*

1. *(0.5 балла)* Доказать, что в эйлеровом графе мосты отсутствуют.

2. *(0.5 балла)* Определить значения m и n, при которых полный двудольный граф $K_{m,n}$ является эйлеровым. А при каких значениях m и n в таком графе не существует эйлеров цикл, но существует эйлеров путь?

3. *(1 балл)* Рассмотрим квадратную сетку, состоящую из $5 \cdot 5 = 25$ вершин, соединенных между собой сорока ребрами. Можно ли покрыть эту сетку пятью ломаными длины 8? А восемью ломаными длины 5?

4. *(1 балл)* Рассмотрим связный простой регулярный граф G, степень любой вершины которого равна четырем. Доказать, что ребра этого графа всегда можно покрасить в два цвета (красный и синий) так, чтобы любая вершина была инцидентна ровно двум синим и ровно двум красным ребрам.

5. *(1.5 балла)* Предположим, что связный граф G эйлеров. Рассмотрим следующий алгоритм обхода ребер графа G. Выберем произвольную вершину x_0, а также некоторое инцидентное ей ребро $e_1 := \{x_0, x_1\}$, и зафиксируем путь $T_1 := \{x_0, e_1, x_1\}$. Затем на i-м шаге, $i = 1, \dots, m-1$, рассмотрим граф $G_i := G - E(T_i)$, полученный удалением пройденных ребер e_i пути T_i, а также вершину x_i, до которой мы с помощью этого пути T_i дошли. В случае, если x_i оказалась листом, добавим к пути T_i ребро $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. В противном случае в качестве очередного ребра $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ выберем ребро, не являющееся мостом в графе G_i, и добавим его к T_i. В обоих случаях получим новый путь

$$T_{i+1} = \{x_0, e_1, x_1, \dots, x_i, e_i, x_{i+1}\}.$$

   Доказать корректность этого алгоритма, а именно, показать, что описанный алгоритм завершится на $(m-1)$-м шаге построением эйлерового цикла T_m в исходном графе G.

6. *(2 балла)* Рассмотрим эйлеров граф без петель. Удалим в нем ребро $e = \{x, y\}$. Доказать, что количество $\{x, y\}$-путей (не обязательно простых, trails), в которых вершина y встречается только в конце каждого из этих путей, нечетно.

   В качестве примера можно рассмотреть граф "бабочка состоящий из двух треугольников $(1, 2, 3)$ и $(3, 4, 5)$, склеенных в точке 3. Удалив в таком графе ребро $\{1, 2\}$, получаем три пути, соединяющих 1 и 2: один — простой путь $(1, 3, 2)$; два — пути, не являющиеся простыми (trails): $(1, 3, 4, 5, 3, 2)$; $(1, 3, 5, 4, 3, 2)$.

   Доказать, что количество таких путей, не являющихся простыми, обязательно четно.

7. *(1.5 балла)* Пусть в графе G имеется вершина x нечетной степени. Доказать, что среди инцидентных x ребер найдется ребро e, для которого количество различных циклов, проходящих через e, четно.

8. *(1 балла)* С использованием двух предыдущих упражнений доказать справедливость еще одной характеризации эйлерова графа: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждое его ребро e принадлежит нечетному количеству циклов в G.

9. *(1.5 балла)* Найти одну из последовательностей де Брейна $B(3, 3)$ длины 27, построив предварительно орграф на девяти вершинах, в котором последовательности $B(3, 3)$ отвечает эйлеров цикл.

10. *(2 балла)* Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, в котором любая вершина x' отвечает некоторому ребру $e \in E(G)$ графа G, и в котором две вершины смежны между собой тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра в графе G инцидентны одной и той же вершине. Опишите все связные простые графы G, такие, что они изоморфны своему реберному графу $L(G)$.

11. *(1.5 балла)* Доказать, что в любом связном графе G, построенном на $n \geq 3$ вершинах, можно обойти все вершины, пройдя в сумме не более чем по $2n - 4$ ребрам.