Задачи по алгебраическим структурам (SE). 3

(**2**) 5′. Пусть G — группа и $|G| \in 2\mathbb{N}$; докажите, что $\exists\, g \in G\ (\mathrm{ord}(g) = 2)$.

(**2**) 6′. Пусть G — группа и $|G| \in (2\mathbb{N} - 1)$.

Докажите, что отображение, действующее из G в G по правилу $g \mapsto g^2$ для любых $g \in G$, является биекцией (используйте лемму о порядке элемента и принцип Дирихле).

Задачи

(**4**) 31. а) Докажите, что $\{|H| \mid H \leq \mathrm{S}_4\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

б) Проверьте, что классы сопряженности в группе A_4 суть следующие множества: $\{\mathrm{id}_4\}$, $\{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$, $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\}$ и $\{(1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\}$.

в) Докажите, что $\{|H| \mid H \leq \mathrm{A}_4\} = \{1, 2, 3, 4, 12\}$.

• В задаче 32 используются следующие понятие и отождествление:

⋆ пусть G — группа и $H \leq G$; элементы x и y группы G называются *сопряженными под действием подгруппы* H, если $\exists\, h \in H\ (hxh^{-1} = y)$;

⋆ для любого $n \in \mathbb{N}$ отождествим каждую перестановку u, действующую на множестве $\{1, \ldots, n-1\}$, с перестановкой, действующей на множестве $\{1, \ldots, n\}$ по правилу $i \mapsto u(i)$ для любых $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $n \mapsto n$; таким образом мы получим, что группа S_{n-1} — подгруппа группы S_n.

(**4**) 32. Пусть $n \in \mathbb{N}$.

а) Опишите явно классы сопряженности в группе S_n под действием подгруппы S_{n-1}.

б) Пусть $u \in \mathrm{S}_n$; докажите, что перестановки u и u^{-1} сопряжены под действием подгруппы S_{n-1}.

(**5**) 35. а) Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $u \in \mathrm{S}_n$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $i \neq j$; докажите, что(⋆)

$$\kappa(u \circ (i\ \ j)) = \begin{cases} \kappa(u) + 1, \text{ если числа } i \text{ и } j \text{ принадлежат одному циклу в перестановке } u; \\ \kappa(u) - 1, \text{ если числа } i \text{ и } j \text{ принадлежат разным циклам в перестановке } u. \end{cases}$$

Пусть далее $n \in \mathbb{N}_0$ и $u \in \mathrm{S}_n$.

б) Докажите, что наименьшая длина записи перестановки u в виде произведения транспозиций равна $n - \kappa(u)$ (то есть перестановку u можно представить в виде произведения транспозиций в количестве, равном $n - \kappa(u)$, и это число — наименьшее число, для которого существует такое разложение).

в) Докажите, что $n - \kappa(u) \leq |\mathrm{inv}(u)|$.

Пусть перестановка u обладает свойством $n - \kappa(u) = |\mathrm{inv}(u)|$; рассмотрим перестановку u как массив $(u(1), \ldots, u(n))$ и будем сортировать его с помощью какого-нибудь алгоритма сортировки, делающего обмены элементов; сравните число обменов элементов данного массива при использовании сортировки пузырьком и при использовании произвольной сортировки, делающей обмены элементов.

Указания к задачам

31. Указание к этой задаче было дано на лекции о знакопеременных группах. В пункте б достаточно проверить, что перестановки $(1\ 2)(3\ 4)$ и $(1\ 3)(2\ 4)$ сопряжены в группе A_4, перестановки $(1\ 2\ 3)$ и $(1\ 3\ 4)$ сопряжены в группе A_4, перестановки $(1\ 2\ 4)$ и $(1\ 3\ 2)$ сопряжены в группе A_4, но при этом перестановки $(1\ 2\ 3)$ и $(1\ 3\ 2)$ не сопряжены в группе A_4 (хотя данные перестановки сопряжены в группе S_4). В пункте в используйте пункт б, а также пункты б и в задачи 10.

32. а) Действуйте по аналогии с доказательством теоремы об описании классов сопряженности в симметрических группах (в описании классов сопряженности под действием подгруппы S_{n-1} должен участвовать цикловый тип перестановок, а также еще один параметр). б) Используйте пункт а.

Пример. Классы сопряженности в группе S_3 под действием подгруппы S_2 суть следующие множества: $\{\mathrm{id}_3\}$, $\{(1\ 2)\}$, $\{(1\ 3), (2\ 3)\}$ и $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

(⋆)Напоминание: $\kappa(u)$ — число циклов в перестановке u (например, $\kappa(\mathrm{id}_n) = n$).

35. а) Изучите, что происходит с циклами в перестановке u при умножении на транспозицию $(i\ j)$.

б) Используя пункт а, действуйте по аналогии с доказательством теоремы о разложении перестановки в произведение фундаментальных транспозиций (в доказательстве данной теоремы нужно уменьшать число инверсий в перестановке, умножая ее на фундаментальные транспозиции, а в решении пункта б нужно увеличивать число циклов в перестановке, умножая ее на транспозиции).

в) Используйте пункт б вместе с теоремой о разложении перестановки в произведение фундаментальных транспозиций. При ответе на вопрос о числе обменов в сортировках используйте связь между сортировками, делающими обмены элементов, и умножением перестановок справа на транспозиции.