Жорданов базис и вычисление функций от матриц

Допустим мы нашли характеристический многочлен, всё собственные числа. Теперь необходимо найти жорданов базис, а заодно и жорданову форму. Зафиксируем собственное число λ. Пусть размер самой большой клетки равен с собственным числом λ равен k.

Будем заполнять столбики диаграммы Юнга базисными векторами в порядке их убывания сверху вниз. Прежде всего заметим, что если у нас уже известен вектор самой высокой ячейки столбика, то все векторы внизу это просто его образы относительно оператора $(A-\lambda E)^k$.

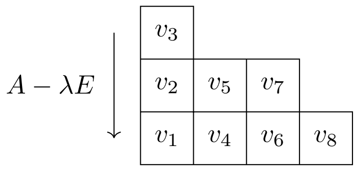

Рис. 1. $8=3+2+2+1$, расставляем базисные вектора

Как расставить векторы в верхней строке диаграммы? Векторы $v_{i_1},\dots,v_{i_s}$ в верхней строке определяются тем, что их образы при $(A-\lambda E)^{k-1}$ линейно независимы (в частности, не лежат в ядре). Или, (что эквивалентно) система $v_{i_1},\dots,v_{i_s}$ вместе с базисом $\operatorname{Ker}(A-\lambda E)^{k-1}$ образуют линейно независимую систему. Напомню, что их число равно $s=\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda E)^k-\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda E)^{k-1}$.

Что делать с теми клетками, чьи столбики в диаграмме Юнга начинаются не на самом верху? Пусть мы уже заполнили все строки на высоте больше $i+1$. Заполним остаток строки на высоте i. Очевидно, что оставшиеся векторы лежат в ядре $(A-\lambda E)^i$ и при этом их образы при $(A-\lambda E)^{i-1}$ линейно независимы. Однако вектора из уже заполненных клеток на уровне i тоже подходят под это описание. Можно однако заметить, что образы системы «старые вектора на уровне i», «новые вектора на уровне i» при $(A-\lambda E)^{i-1}$ линейно независимы все вместе. Это даёт необходимые условия на оставшиеся вектора в строке i.

Введём пару определений.

Определение 1. Пусть K — некоторое поле. Минимальным многочленом оператора A на векторном пространстве над полем K называется многочлен $\mu(x)$, имеющий старший коэффициент 1 и порождающий идеал

$$\langle\mu(x)\rangle=\{p(x)\in K[x]\,|\,p(A)=0\}.$$

Минимальный многочлен так же называют минимальным аннулятором.

Если привести матрицу к жордановой форме, то станет видно, что:

Факт. Минимальный многочлен делит характеристический многочлен (теорема Гамильтона-Кэли). Корни характеристического многочлена являются корнями минимального. Кратность множителя $x-\lambda$ в минимальном многочлене равна наибольшему размеру клетки с собственным числом λ.

Перейдём к понятию аналитической функции.

Определение 2. Пусть K - полное нормированное поле (для нас пока что это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Пусть $B\subseteq K$ - открытое подмножество в K. Функция $f\colon B\to K$ называется аналитической, если для любой точки $x_0\in B$ шарик U с центром в точке x_0 и набор a_i, что $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ на U. Иными словами функция в окрестности каждой точки задаётся в виде суммы ряда.

Определение 3. Пусть дан набор чисел $a_i\in K$. Радиусом сходимости ряда $\sum a_ix^i$ будем называть вещественное (какое бы ни было поле K) число $\rho\in\mathbb{R}$, такое, что $\frac{1}{\rho}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$. Конечно, иногда ρ бывает бесконечным.

Следующие факты говорят про устройство и способы построения аналитических функций.

Факт. Пусть ряд $\sum a_ix^i$ имеет радиус сходимости ρ. Тогда для всех $x\in K$, таких что $|x|<\rho$ ряд $\sum a_ix^i$ сходится (даже абсолютно). А при всех $|x|>\rho$ ряд расходится.

Факт. Пусть $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum a_i x^i$ заданную на открытом шарике радиуса ρ. Тогда функция f диффиренцируема (в подходящем смысле над $\mathbb{C}$) и её производная равна $f'(x) = \sum i a_i x^{i-1}$ всюду на том же шаре.

Факт. Более того для всякой точки $|x_0| < \rho$, если переписать выражение $\sum a_i x^i$ в виде $\sum b_i (x - x_0)^i$, где b_i сами по себе какие-то ряды (с коэффициентами a_i от x_0), то b_i сходятся и ряд $\sum b_i y^i$ имеет радиус сходимости

$$\rho' \geq \rho - |x_0| \quad \text{и} \quad \sum a_i x^i = \sum b_i (x - x_0)^i.$$

На самом деле эти b_i просто значения i-ой производной f с подходящим коэффициентом в точке x_0.

Факт. В частности, функция $f(x) = \sum a_i x^i$ аналитична на открытом шарике радиуса ρ.

Факт. Произведение и сумма двух аналитических в одной и той же области функций — снова аналитическая функция.

Факт. Если $K = \mathbb{C}$, то условие аналитичности эквивалентно условию наличия комплексной производной. Поэтому, если вы видите, что производная какой-то функции имеет смысл для комплексных значений значит эта функция доопределяется до аналитической в этой точке. Например функция $\frac{1}{x-\lambda}$ является аналитической везде, кроме точки λ, где она не определена.

Описанная конструкция позволяет доопределить функцию $f(x) = \sum a_i x^i$ на открытое множество, большее, чем изначальная область с помощью «переразложения» этой функции. Однако есть точки в которых функция не может быть доопределена до аналитичной. Такие точки называют особыми (точное определение я не дам). Верно утверждение, что на окружности $|x| = \rho$, где ρ - радиус сходимости ряда есть по крайней мере одна особая точка. Типичным примером особой точки являются:
а) точка λ для функции $\frac{1}{x-\lambda}$;
б) точка 0 для функции $\sqrt[n]{x}$;
в) точка 0 для функции $\ln(x)$;
г) точка 0 для функции $e^{\frac{1}{x}}$.

Как видно из определения аналитическая функция задаётся как предел многочленов от одной переменной. Таким образом в любой алгебре R, где есть понятие сходимости можно попытаться определить значение аналитической функции на элементе $a \in R$, как предел многочленов от a. Нас будет интересовать случай $R = M_n(K)$.

Определение 4. Пусть $A \in M_n(K)$ некий элемент, а $f(x) = \sum a_i (x - x_0)^i$ аналитическая функция (в круге радиуса ρ с центром в x_0). Положим

$$f(A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i (A - x_0 E)^i$$

если этот предел определён.

Если мы научимся хорошо считать выражения вида $p(A)$, где p — многочлен, то посчитаем и значение аналитической функции.

Факт. Пусть $A = CBC^{-1}$. Тогда $p(A) = Cp(B)C^{-1}$.

Это позволяет свести все вычисления к случаю, когда A — жорданова клетка (для алгебраически замкнутого поля).

Факт. Пусть $A = J_k(\lambda)$, $p \in K[x]$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & & & \frac{1}{k!}p^{(k)}(\lambda) \\ & p(\lambda) & p'(\lambda) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & p(\lambda) & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Это утверждение верно над любым полем.

Ясно, что теперь мы умеем вычислять функцию от любой матрицы (оператора).

Теорема. Рассмотрим функцию заданную рядом $\sum a_i x^i$ с радиусом сходимости ρ. Пусть собственные числа λ_i оператора A по модулю $|\lambda_i| < \rho$. Тогда ряд $\sum a_i A^i$ сходится.

Доказательство. Отображение $A \to CAC^{-1}$ непрерывно по A для фиксированного C (можно в это поверить, а при наличии определений и проверить). Выберем в качестве C^{-1} матрицу перехода в жорданов базис матрицы A. Тогда ясно, что ряд $\sum a_i A^i$ сходится тогда и только тогда, когда он сходится для жордановой формы A. Для жордановой формы он сходится т.к. он сходится покоэффициентно (исходя из явной формулы).

Замечание. Можно построить теорию для вычисления не только аналитических, но и непрерывных (и некоторых разрывных) функций на вещественной прямой от операторов. Но там нет красивого явного ответа, так как непрерывные функции не так просто приблизить многочленами.

Задачи

Задача 1. Найдите характеристический многочлен, жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Найдите жорданову форму и минимальный многочлен оператора A, если известно, что $\chi_A(t) = t^4(t-1)^3$, наибольшее число линейно независимых собственных векторов равно 4, а $\dim \operatorname{Im} A = 4$.

Задача 3. Найдите жорданову форму и минимальный многочлен оператора A, если известно, что $\chi_A(t) = t^9$, $\mu_A(t) = t^3$ и $\dim \operatorname{Im} A^2 = 2$.

Жорданова форма полностью убивает теорию линейных рекуррентных соотношений.

Задача 4. Пусть K - поле. Рассмотрим набор чисел $c_0, \dots, c_{k-1} \in K$ и зададим пространство последовательностей

$$V = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ выполнено } x_{n+k} = c_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + c_0 x_n\}.$$

Определим на V оператор сдвига $L(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
а) Найдите размерность пространства V. Покажите, что L действительно оператор на V. Найдите матрицу оператора L в каком-нибудь базисе.
б) Найдите характеристический и минимальный многочлены оператора L (посмотрите на обнуление для конкретного вектора). Найдите вид собственных векторов оператора L и жорданов базис оператора L. Сделайте из этого вывод про устройство решений линейных рекуррентных соотношений.

Задача 5. Пусть $p(x)$ — некоторый многочлен над алгебраически замкнутым полем K. Допустим операторы A и B на пространстве V коммутируют. Покажите, что $\operatorname{Ker} p(A)$ есть инвариантное относительно B пространство. Покажите, что у операторов A и B есть общий собственный вектор.

Задача 6. Пусть матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = A^\top$. Какие собственные числа могут быть у A и каким может быть её минимальный многочлен?

Задача 7. Найдите e^A, где

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Найдите выражение для определителя матрицы e^A, где A — произвольная квадратная матрица.

Задача 9. Рассмотрим оператор $\frac{d}{dx}$ на пространстве многочленов $K[x]_{\leq n}$. Найдите инвариантное (не зависящее от выбора базиса) выражение для $e^{\hbar \frac{d}{dx}}$.

Задача 10. Найдите

$$\ln \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В каком смысле это выражение определено?