

Задания

5 мая 2017 г.

1. Докажите, что если (A, p_A) – объект \mathbf{C}/Γ , то категория \mathbf{C}/A изоморфна категории $\mathbf{C}/\Gamma/(A, p_A)$.
2. Докажите, что для любого морфизма $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ и мономорфизма $p : A \hookrightarrow \Gamma$ стрелка $\Pi_f(p)$ тоже является мономорфизмом.
3. Докажите, что если в локально декартово замкнутой регулярной категории существуют все конечные суммы, то она гейтингова.
4. Пусть \mathbf{C} – конечно полная категория
 - (а) Докажите, что для любого пулбэка

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & A \\ k \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

следующий квадрат коммутирует с точностью до изоморфизма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}/A & \xrightarrow{h^*} & \mathbf{C}/P \\ \Sigma_f \downarrow & & \downarrow \Sigma_k \\ \mathbf{C}/C & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{C}/B \end{array}$$

- (b) Если \mathbf{C} локально декартово замкнута, то следующий квадрат тоже коммутирует с точностью до изоморфизма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}/A & \xrightarrow{h^*} & \mathbf{C}/P \\ \Pi_f \downarrow & & \downarrow \Pi_k \\ \mathbf{C}/C & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{C}/B \end{array}$$

5. Докажите, что если в категории существует классификатор подобъектов, то в ней все мономорфизмы регулярны.

6. Докажите, что в любой категории с классификатором подобъектов можно проинтерпретировать следующие правила:

$$\frac{\Gamma \vdash A : Prop \quad \Gamma \vdash B : Prop}{\Gamma \vdash A \wedge B : Prop}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : Prop \quad \Gamma \vdash B : Prop}{\Gamma \vdash El(A \wedge B) \equiv (El(A) \times El(B))}$$