

Практика по алгоритмам

Всеволод Опарин, Алексей Давыдов

Осень, 2014

1 Практика 1. Асимптотика

1.1 Вспомогательные факты

1. Сумма арифметической прогрессии ($a_{i+1} = a_i + d$): $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.
2. Сумма геометрической прогрессии: $1 + p + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$, $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$. при $0 < p < 1$.
3. Гармонический ряд: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \log n + O(1)$, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{1+\epsilon}} = O(1)$.
4. Оценки на суммы:

(a) Мажорирование:

$$\sum_{i=0}^n i \leq \sum_{i=0}^n n = O(n^2).$$

(b) Разделение на суммы

$$\sum_{i=0}^n i \geq \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor}^n \lfloor n/2 \rfloor = \Omega(n^2).$$

(c) Интегрирование

$$\Omega(n^2) = \int_0^n x dx \leq \sum_{i=1}^n i \leq \int_1^{n+1} x dx = O(n^2).$$

1.2 Практика

Асимптотика:

1. n^k и c^n сравнить по O -нотациями.
2. $p(n) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$. Для каких k какие отношения между $p(n)$ и n^k .
3. $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$?
4. $2^{n+1} = O(2^n)$? $2^{2n} = O(2^n)$?
5. $f(n) = O(f(n)^2)$?
6. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$?
7. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = O(\log g(n))$?
8. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

9. $f(n) = f(n/2)$?
10. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$?
11. $\log n! = \Theta(n \cdot \log n)$?

Суммы:

1. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \Omega(\log n)$ через интегралы и разбиения на части.
2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = O(1)$.
3. $\sum_{k=0}^{\log n} \lceil n/2^k \rceil$.
4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \ln(\sqrt{n}) + O(1)$.
5. $\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)/2^k = ?$.
6. $\prod_{k=1}^n (2 \cdot 4^k)$.
7. $\prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2)$.

1.3 Домашнее задание

Дедлайн: 23.59 11.09.2014

Группа Давыдова решает все суммы в качестве домашнего задания.

1. Посчитать произведения

- (a) $\prod_{k=1}^n (2 \cdot 4^k)$.
- (b) $\prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2)$.

2. Заполнить табличку.

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
\sqrt{n}	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

3. Упорядочить функции в порядке возрастания.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{n})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg n!$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^* \lg n$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\lg^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \leq 1; \\ 1 + \lg^*(\lg n) & \text{иначе.} \end{cases}$

2 Практика 2. Линейные алгоритмы

2.1 Практика

1. Реализовать стек с операциями PUSH, POP, MAX при условии, что каждая операция работает за константное время.
2. Реализовать очередь с операциями PUSH, POP, MAX при условии, что каждая операция работает за константное время.
3. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что сумма $\sum_{i=l}^r a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от n время.

2.2 Домашнее задание

Дедлайн: 18 сентября, 23.59

1. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что сумма $\sum_{i=l}^r a_i$ была бы максимальной. Задачу требуется решить за линейное от n время.
2. Дана скобочная последовательность, составленная из скобок '(', ')', '[', ']', '{', '}'. Последовательность называется корректной, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая скобка того же типа, и соблюдается вложенность. Примеры, $(\{\})$ и $()()$ – корректные, а $()$ и $[(])$ – нет.

Предоставьте алгоритм, который проверяет корректность последовательности за линейное время.

3. Дан массив целых чисел a_i . Придумайте структуру данных, которая бы умела отвечать на запросы вида: "По данным l и r вернуть $\sum_{i=l}^r a_i$." за $O(1)$.

Разрешается сделать предподсчет за $O(n)$. Значения в массиве не меняются.

4. Дано число, представленное n цифрами в десятичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно k цифр так, чтобы результат был бы максимальным. Задачу требуется решить за линейное от n время.

Внимание! k подается на вход и может быть порядка n . Решение за $O(kn)$ приравнивается к квадратичному от n .

5. (*) Дана последовательность объектов a_1, a_2, \dots, a_n . Над объектами определена операция сравнения. Известно, что в последовательности есть элемент присутствующий не менее чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Требуется найти элемент a за линейное время и константу дополнительной памяти при условии, что последовательность задана форвард-итератором.
6. (*) Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l, r]} a_i$ было бы максимально. Задачу требуется решить за линейное от n время.

3 Практика 3. Разделяй-и-властвуй

3.1 Вспомогательные факты

1. Пусть $a \geq 1$ и $b > 1$ — константы, $f(n)$ — функция, $T(n)$ определено при неотрицательных n формулой

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

где под n/b понимается либо $\lceil n/b \rceil$, либо $\lfloor n/b \rfloor$. Тогда

- (a) если $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ для некоторого $\epsilon > 0$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
 - (b) если $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$;
 - (c) если $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ для некоторого $\epsilon > 0$ и если $af(n/b) \leq cf(n)$ для некоторой константы $c < 1$ и достаточно больших n , то $T(n) = \Theta(f(n))$.
2. Комментарий к задачам про оценку асимптотики. Можно считать, что для некоторой константы n_0 и всех $n \leq n_0$ верно, что $T(n) = 1$.
 3. **Утверждение.** Пусть $y(n)$ — монотонная неограниченная функция, и $f(n) = O(g(n))$. Тогда $f(y(n)) = O(g(y(n)))$.

Доказательство. Нам известно, что для некоторой константы c и n_0 , $f(n) \leq c \cdot g(n)$ при $n \geq n_0$. Заметим, что, начиная с некоторой величины n' , $y(n) > n_0$. Значит, $f(y(n)) \leq c \cdot g(y(n))$, начиная с n' . Значит, $f(y(n)) = O(g(y(n)))$.

4. Разбор задачи $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + \log n$.

Проведем замену переменных. Пусть $y = \log n$. Тогда $T(2^y) = 2 \cdot T(2^{\frac{y}{2}}) + y$. Пусть $T'(y) = T(2^y)$. Тогда, для T' справедлива следующая рекуррентная формула

$$T'(y) = 2 \cdot T'(y/2) + y.$$

По теореме о рекуррентных соотношениях получаем, что $T(2^y) = T'(y) = O(y \cdot \log y)$. Подставим $y = \log n$. По предыдущему пункту получим, что $T(2^{\log n}) = T(n) = O(\log n \cdot \log \log n)$.

3.2 Практика

1. Определить асимптотику.

- (a) $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) + n$.

3.3 Домашнее задание

Дедлайн: 25 сентября, 23.59

1. Определить асимптотику.

- (a) $T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$.

- (b) $T(n) = T(a) + T(n - a) + n$ для произвольной константы a .

- (c) $T(n) = T(\alpha \cdot n) + T((1 - \alpha) \cdot n) + n$ для произвольной константы $\alpha \in (0, 1)$.

- (d) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^k$ для $k \in \{1, 2, 3\}$.

2. Определить асимптотику $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \log n \rfloor) + 2^{\log^* n}$.

3. Есть k отсортированных массивов. В сумме массивы содержат n элементов. Слить массивы за $O(n \log k)$.

4. Назовем массив $A[1..n]$ унимодальным, если он сначала возрастает, а потом убывает. Строго говоря, существует такое $m \in [1, n]$, что

- $A[i] < A[i + 1]$ для $1 \leq i < m$;
- $A[i] > A[i + 1]$ для $m \leq i < n$.

Элемент с номером m назовем *пиком*.

(a) Постройте алгоритм для поиска пика за $O(\log n)$.

(b) Дан выпуклый многоугольник на плоскости из n вершин. Вершины заданы в порядке обхода по часовой стрелке. Никакие три подряд идущие вершины не лежат на одной прямой. Требуется найти минимальный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, содержащий данный многоугольник (bounding box) за $O(\log n)$.

5. * Дан массив из n различных элементов. Требуется найти число инверсий за $O(n \log n)$ (число инверсий в массиве a , это число таких пар (i, j) , что $i < j$, но $a[i] > a[j]$).

6. * Структура данных файл последовательного доступа поддерживает следующие операции:

- *Read()*: чтение числа из файла на текущей позиции и перевод позиции вперед на 1 элемент.
- *Write(x)*: запись числа в файл в текущую позицию и перевод позиции вперед на 1 элемент.
- *Rewind()*: перевод позиции на начало файла.

Требуется отсортировать файл за $O(n \log n)$ используя $O(1)$ памяти и два дополнительных файла.

4 Практика 4. Сортировки

4.1 Практика

1. Даны два массива a и b длины n , сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в отсортированном порядке.
 - (a) За $O(n^2 \log n)$.
 - (b) За $O(n^3)$ с использованием $O(n)$ дополнительной памяти.
 - (c) За $O(n^2 \log n)$ с использованием $O(n)$ дополнительной памяти.
2. В свободное время Анка-пулеметчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке. Но тут Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k . Всего патронов n . Помогите Анке отсортировать патроны.
 - (a) Отсортируйте патроны за $O(nk)$.
 - (b) Отсортируйте патроны за $O(n + I)$, где I — число инверсий.
 - (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.
 - (d) Отсортируйте патроны за $O(n \log k)$.
3. Дано n точек на плоскости. Никакие три не лежат на одной прямой. Соединить точки
 - (a) $(n - 1)$ -звенной ломаной без самопересечений (не замкнутой);
 - (b) n -звенной ломаной без самопересечений (замкнутой)за $O(n \log n)$.
4. Дан набор из n отрезков $[a_i, b_i]$. Числа a_i, b_i — вещественные.
 - (a) Найти такое вещественное x , что $|\{i: x \in [a_i, b_i]\}|$ максимально.
 - (b) Длину объединения отрезков.
 - (c) Для каждого k определить множество точек S_k , покрытых ровно k отрезками. Множество S_k можно представить как набор непересекающихся отрезков. Найти суммы длин этих отрезков для каждого k .за $O(n \log n)$
5. Даны два массива a и b одинаковой длины. Нужно найти такую перестановку p , что $\sum_{i=1}^n a_{p_i} b_i \rightarrow \max$. Решение обосновать.

4.2 Домашнее задание

Дедлайн: 2 октября, 23.59

1. Дано бинарное дерево: $Tree ::= Node(Tree, Tree) | Empty$ (эта запись означает, что дерево — это либо вершина с парой потомков-деревьев, либо особое значение $Empty$). Определим функцию $\mathbf{rank}(x)$ следующим образом:

- $\mathbf{rank}(Empty) = 0$
- $\mathbf{rank}(Node(left, right)) = \min(\mathbf{rank}(left), \mathbf{rank}(right)) + 1$.

Назовем бинарное дерево *скошенным влево (левацким)*, если для его вершин выполнено следующее свойство:

$$\forall x=Node(left, right) \mathbf{rank}(left) \geq \mathbf{rank}(right).$$

Скошенная влево (левацкая) куча — это скошенное влево дерево, в вершинах которого хранятся данные, для которых выполнено свойство кучи.

- Докажите, что для любого скошенного влево дерева $|T| \geq 2^{\mathbf{rank}(T)-1}$ ($|T|$ обозначает количество вершин в дереве T).
 - Придумайте, как слить две скошенные влево кучи H_1 и H_2 за время $O(\log |H_1| + \log |H_2|)$.
 - Придумайте, как используя операцию слияния, построенную на предыдущем шаге, реализовать операции:
 - $Insert(x)$ — добавление элемента x в кучу,
 - $Pull()$ — удаление минимального элемента из кучи.
2. Дано $2n - 1$ коробок с черными и белыми шарами. В i -ой коробке находится w_i белых и b_i черных шаров. Всего в коробках находится W белых и B черных шаров. Требуется выбрать n коробок таким образом, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а черных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $O(n \log n)$.
 3. На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n в порядке возрастания. Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти такую точку q , что $\sum_i w_i \cdot |p_i - q|$ имела бы минимальное значение. Время работы: $O(n)$.
- Примечание.** Точки на вход подаются в порядке возрастания.
4. (*) Дан массив из $n + 1$ целого числа от 1 до n . Массив доступен только на чтение, есть $O(1)$ дополнительной памяти. Найти за $O(n)$ любое число, которое встречается хотя бы два раза.

5 Практика 5. Быстрая сортировка

5.1 Практика

1. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n . Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Пирожки можно менять местами. Память у робота маленькая, $O(\log n)$.

Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.

2. Разработайте алгоритм, который позволит находить k -порядковую статистику через медиану.
3. Рассмотрим следующий алгоритм быстрой сортировки массива $A[1..n]$.

- Взять элемент с номером $\text{pivot} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
- Перенести в отдельный массив все элементы меньше $A[\text{pivot}]$, затем равные, затем большие, сохраняя порядок.
- Запустить алгоритм рекурсивно на элементах меньших $A[\text{pivot}]$, затем на больших.

Будем оценивать сложность алгоритма как суммарную длину всех массивов, на которых будет рекурсивно запущен алгоритм.

Постройте алгоритм, который получает на вход n и строит наиболее сложный пример для сортировки за линейное от n время.

4. (*) Куча хранится в массиве длины n . Родитель p хранит детей в ячейках $2 \cdot p + 1$ и $2 \cdot p + 2$. Алгоритм приступает к сортировке. Сортировка устроена следующим образом.

- Поменять первый и последний элемент кучи местами.
- Уменьшить размер кучи на единицу.
- Запустить `heapifyDown` на первом элементе.

`heapifyDown` меняет родителя с наибольшим ребенком (при условии, что ребенок больше родителя) и запускается рекурсивно. Сложность кучи определим через число вызовов функции `heapifyDown`. Требуется придумать алгоритм, который по n строит самую сложную кучу. Ответ должен быть в виде перестановки из n элементов. Решить за $O(n \log n)$.

5. * Придумайте структуру данных, которая поддерживает следующие операции (в оценках времени работы n — текущее количество элементов) :

- *Insert*(x) — добавление элемента x за $O(\log n)$,
- *Pull*() — удаление минимального элемента за $O(\log n)$,
- *Copy*() — копирование структуры за $O(1)$ (после копирования с каждой из копий можно независимо проделывать любую из данных трех операций).

Подсказка: за основу можно взять левацкую кучу.

6 Практика 6. Медианы

6.1 Практика

1. Дан массив $A[1..n]$ из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.

(a) По позиции в отсортированном массиве.

$$d(x, \text{median}) = |\text{pos}(x) - \text{pos}(\text{median})|,$$

где $\text{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.

(b) По значению.

$$d(x, \text{median}) = |x - \text{median}|.$$

2. Дано два массива a_1, a_2, \dots, a_n и p_1, p_2, \dots, p_m . Нужно за $O(n \log m)$ для каждого i найти p_i -ую порядковую статистику в массиве a .
3. Медианой называется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -я порядковая статистика. Придумайте структуру данных на основе `heap`, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $O(\log n)$.
4. Дано множество, представленное в виде бинарной кучи. Найти k -ую статистику за:
 - (a) $O(k \log n)$
 - (b) $O(k^2)$
 - (c) $O(k \log k)$
5. Дано множество, представленное в виде бинарной кучи с минимумом в корне. Найти k -ую статистику за $O(k \log k)$.
6. (*) Найти отрезок массива, на котором $(\min_{i \in [l, r]} a_i) \cdot \sum_{i \in [l, r]} a_i$ максимально. Время $O(n)$. Числа целые.

6.2 Домашнее задание

Дедлайн: 22 октября, 23.59

1. Придумайте структуру данных на основе кучи со следующими операциями: `Insert(x)`, `Delete{Median,Min,Max}()`, `Get{Median,Min,Max}()`. Все операции должны выполняться за $O(\log n)$.
2. Пусть есть массив, состоящий из различных элементов, и алгоритм A , который находит k -ую порядковую статистику, используя только попарные сравнения. Покажите, что, используя результаты сравнений, проведенных алгоритмом, можно разделить элементы на меньшие k -ой статистики и большие её.
3. Дан набор из n целых чисел. Найдите пару чисел, сумма которых наиболее близка к нулю. Время работы $O(n \log n)$.
4. Дан набор из n пар гаек и болтов, все размеры которых различны. Гайки и болты перемешаны. Требуется для каждой гайки найти соответствующий болт. Сравнивать можно только болты с гайками (сравнить две гайки между собой, или два болта между собой — невозможно). Время работы:
 - (a) $O(n \log n)$ в среднем,
 - (b) (*) $O(n \log n)$.
5. (*) Назовем массив $A[0..n-1]$ почти отсортированным (на 90%), если из него можно вычеркнуть 10% элементов, чтобы оставшиеся оказались в отсортированном порядке.

Наша задача построить эффективный алгоритм для проверки на почти отсортированность. Для простоты, далее будем рассматривать только массивы, все элементы которых различны.

Рассмотрим следующий алгоритм.

```
def binary_search(a, key, left, right):
    if left == right - 1:
        return left
    else:
        mid = left + (right - left) / 2
        if key < a[mid]:
            return binary_search(a, key, left, mid)
        else:
            return binary_search(a, key, mid, right)
```

```
def check-sort(a):
    for r in range(0, k):
        i = random.range(0, n)
        j = binary_search(a, a[i], 0, len(a))
        if i != j:
            return False
    return True
```

Докажите, что при выборе соответствующего k данный алгоритм

- выдает всегда `True` для отсортированного массива;
- выдает `False` с вероятностью хотя бы $\frac{2}{3}$, если массив не отсортирован на 90%.

Оцените значение k .

7 Практика 7. Графы

7.1 Практика

1. Дано корневое дерево $T = \langle V, E \rangle$. Каждая вершина может иметь произвольное число детей. Придумайте структуру данных, которая позволяла бы отвечать на запросы вида: "Является ли вершина u потомком вершины v ?" за $O(1)$. Разрешается сделать препроцессинг за линейное время.
2. Дан граф $G = \langle V, E \rangle$. Проверить, является ли он двудольным. Время: $O(V + E)$.
3. Дан граф $G = \langle V, E \rangle$. Есть ребро e . Проверить, лежит ли ребро на каком-нибудь цикле. Время: $O(V + E)$.
4. Для заданного неориентированного графа $G = \langle V, E \rangle$ посчитать минимальное число ребер, которые нужно добавить в граф, чтобы он стал связным, за $O(V + E)$.
5. Корневое дерево T на V вершинах задается массивом из V элементов. Все вершины пронумерованы. Для каждой вершины в массиве указан его родитель. Для корня r значение в массиве равно -1 . Требуется определить как будет выглядеть новое представление дерева, если корень r сменить на корень q . Разрешается использовать $O(1)$ дополнительной памяти. Менять массив можно. Время $O(V)$.
6. (*) Дан неориентированный граф G . Степень каждой вершины графа не превосходит трех. Требуется разбить граф на две доли так, чтобы у каждой вершине в ее же доле было не более одного соседа. Время $O(V + E)$.

8 Практика 8. Дейкстра + поиск в глубину

8.1 Практика

1. Дан ориентированный ациклический граф $G = \langle V, E \rangle$. Найти в нем гамильтонов путь за $O(V + E)$ или сказать, что такого нет.
2. Есть три бочки на 10, 7 и 4 литра. 7- и 4-литровые бочки заполнены водой. Разрешается переливать воду между бочками до момента либо пока одна бочка не заполнится полностью, либо пока из другой не выльется вся вода. Проверить, можно ли отмерить 2 литра. Если возможно, найти минимальное число переливаний. Как решить аналогичную задачу при условии, что емкости бочек a, b и c ($a \leq b \leq c$); бочки с емкостями a и b заполнены водой? Время: $O(a \cdot b)$.
3. В стране n аэропортов. Самолет может сделать перелет из аэропорта i в аэропорт j , израсходовав w_{ij} горючего. При этом w_{ij} может отличаться от w_{ji} , и $w_{ii} = 0$. Требуется найти минимальный размер бака, позволяющий добраться самолету из любого города в любой, возможно с дозаправками. Решить за $O(n^2 \log W)$, где W — максимум по всем w_{ij} .
4. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Назовем ребро хорошим, если оно не лежит ни на одном цикле. Найдите все хорошие ребра за $O(V + E)$.
5. Постройте граф с отрицательными весами, на котором Дейкстра выдавал бы неверный ответ. Граф не должен содержать отрицательных циклов. Где в доказательстве используется положительность весов ребер?
6. Рассмотрим взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$. Пусть некоторые ребра имеют отрицательный вес, но граф не имеет отрицательных циклов. Назначим каждой вершине v некоторое число ϕ_v так, что $w'_{uv} = w_{uv} + \phi_v - \phi_u \geq 0$ для любого ребра $(u, v) \in E$. Будем искать кратчайшие пути алгоритмом Дейкстры на графе с весами w' . Может ли алгоритм Дейкстры дать неверный ответ при таком подходе? Ответ докажете.
7. (*) Пусть есть связный граф $G = \langle V, E \rangle$. Минимальный разрез графа — это минимальное по размеру множество ребер такое, что после его удаления граф теряет связность. Рассмотрим операцию стягивания ребра (u, v) . Это операция, после которой ребро (u, v) пропадает, вершины u и v сливаются, а множества ребер, исходящих из них, объединяются, возможно образуя кратные ребра. Рассмотрим следующий алгоритм. Будем равномерно случайно брать ребро из графа и стягивать его. Будем так делать, пока в графе не останутся две вершины.
 - (a) Докажите, что число ребер между оставшимися двумя вершинами будет не меньше размера минимального разреза.
 - (b) Оцените снизу вероятность того, что это число будет равно размеру минимального разреза.
 - (c) Постройте эффективный алгоритм поиска минимального разреза, который ошибается с константной вероятностью.

8.2 Домашнее задание

Дедлайн: 30 октября, 23.59

1. Есть клетчатое поле $n \times m$. Северо-западная клетка имеет координаты $(1, 1)$. Некоторые клетки закрашены черным цветом. Есть обычный игральный кубик: каждая сторона помечена числом от 1 до 6, сумма чисел на противоположных гранях равна 7. Размеры грани кубика и клетки совпадают. Кубик стоит в клетке $(1, 1)$. На верхней грани написано число 1, на южной – 2, на восточной 3. Кубик разрешается перекатывать в соседнюю по ребру клетку, если она не покрашена в черный. Можно ли привести кубик в клетку (n, m) , чтобы его пространственное положение было таким же, как изначально в $(1, 1)$. Задача: построить для данной задачи граф из $O(nm)$ ребер и $O(nm)$ вершин.
2. В долине потоп. Долина представляет собой клетчатое поле $n \times m$. В каждой клетке написана высота. Максимальная высота клетки – h , минимальная – 0. Изначально уровень воды 0, но каждую минуту он увеличивается на 1. Чтобы пройти между соседними по ребру клетками высоты h_1 и h_2 , необходимо потратить $1 + |h_1 - h_2|$ минут. Турист находится в клетке $(1, 1)$, ему необходимо добраться до клетки (n, m) , не коснувшись воды. Получится ли у него сделать это? Как определить минимальное время, чтобы достигнуть цели, если это возможно? Постройте граф размера $O(nmh)$ для данной задачи.
3. Дан взвешанный ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной вершиной $s \in V$. Требуется построить дерево “кратчайших” путей из вершины s во все остальные по следующим метрикам.
 - (a) Вес пути определяется весом самого тяжелого ребра.
 - (b) (*) Вес пути определяется парой весов самого тяжелого ребра и следующего за ним по весу. Пары сравниваются по элементно: сначала первые элемент; если они равны, то вторые.Время – $O((V + E) \log V)$.
4. (*, группа Опарина) Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Назовем ребро хорошим, если удалив его, число компонент связности в графе увеличивается. Найдите все хорошие ребра за $O(V + E)$.
5. (*, группа Давыдова) Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Назовем вершину хорошей, если удалив её, число компонент связности в графе увеличивается. Найдите все хорошие вершины за $O(V + E)$.

9 Практика 9. Кратчайшие пути

9.1 Практика

1. Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной вершиной s . Требуется определить для каждой вершины, есть до нее один кратчайший путь или несколько, за $O((V + E) \cdot \log V)$.
2. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ и выделенное ребро e . Требуется найти кратчайший простой цикл с этим ребром за $O(V + E)$.
3. Дана система неравенств на n переменных. Каждое неравенство имеет вид $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$. Всего неравенств m . Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $O(n \cdot m)$.
4. Дан набор степеней d_1, d_2, \dots, d_n . Требуется построить граф $G = \langle V, E \rangle$, чтобы степень вершины v_i была равна d_i , или сказать, что такого не существует. Граф не должен содержать петли и кратные ребра. Решить за $O(V + E)$.

9.2 Домашнее задание

Дедлайн: 13 ноября, 23.59

1. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Требуется найти кратчайший цикл за $O(VE)$.
2. Дан ориентированный взвешанный граф $G = \langle V, E \rangle$. Найти цикл отрицательного веса и выдать все вершины в нем. Время $O(VE)$.
3. Дан взвешанный ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенными вершинами s и t . Пусть вес пути определяется суммой весов самого тяжелого ребра и следующего за ним по весу. Требуется найти самый легкий путь между вершинами s и t за $O((V + E) \log V)$.
4. (*) Дан набор степеней d_1, d_2, \dots, d_n . Требуется построить граф $G = \langle V, E \rangle$, чтобы степень вершины v_i была равна d_i , или сказать, что такого не существует. Граф не должен содержать петли и кратные ребра. Решить за $O(V + E)$.

10 Практика 10. Жадность

10.1 Практика

1. Преподаватели сделали n заявок на занятие. Каждое занятие начинается в момент b_i и кончается в момент e_i (занимает интервал $[b_i, e_i)$). Два занятия в одной аудитории быть не могут. Распределите заявки по аудиториям так, чтобы общее число аудиторий было минимально. Решить за $O(n \log n)$.
2. В фирму поступило n заказов. На выполнение заказа i необходимо время t_i . В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Пусть e_i – момент окончания выполнения заказа номер i . Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Время $O(n \log n)$.
3. Придумайте алгоритм, который по заданному дереву T на n вершинах строит совершенное паросочетание, или говорит что такого нет. Время $O(n)$.
4. Привести пример частот или объяснить, почему такой код Хаффмана невозможен
 - (a) $\{0, 10, 11\}$;
 - (b) $\{0, 1, 00\}$;
 - (c) $\{10, 01, 00\}$.
5. Дано дерево с помеченными листьями. Требуется построить массив частот (или сказать, что невозможно) такой, что бинарное дерево Хаффмана будет совпадать с данным с точностью до поворота веток.
6. Дан алфавит с наборами вероятностей появления символов $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n$. Докажите, что
 - (a) если $f_1 > \frac{2}{5}$, то код Хаффмана будет содержать кодовое слово длины 1;
 - (b) если $f_1 < \frac{1}{3}$, то код Хаффмана не будет содержать кодовое слово длины 1.

10.2 Домашнее задание

Дедлайн: 27 ноября, 23.59

1. Дано дерево с помеченными листьями. Требуется построить массив частот (или сказать, что невозможно) такой, что бинарное дерево Хаффмана будет совпадать с данным с точностью до поворота веток.
2. Дан алфавит с наборами вероятностей появления символов $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n$. Докажите, что
 - (a) если $f_1 > \frac{2}{5}$, то код Хаффмана будет содержать кодовое слово длины 1;
 - (b) если $f_1 < \frac{1}{3}$, то код Хаффмана не будет содержать кодовое слово длины 1.
3. Пусть есть набор элементов $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и набор подмножеств $\{S_i \subseteq E\}_{i=1}^t$. У каждого множества есть цена w_i . Известно, что $\bigcup_i S_i = E$. Из набора множеств требуется выбрать поднабор с минимальной стоимостью, покрывающий все элементы E . Постройте $(\log n + 1)$ -приближение.
 - (a) Докажите, что $\min_i \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{\sum_i a_i}{\sum_i b_i} \leq \max_i \frac{a_i}{b_i}$ для набора положительных чисел $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^k$.
 - (b) Пусть OPT – оптимальное решение. Докажите, что $\min_i \frac{w_i}{|S_i|} \leq \frac{\text{OPT}}{n}$.
 - (c) Постройте $(\log n + 1)$ -приближенный алгоритм для поиска минимального взвешенного покрытия.

11 Практика 11. Покрывающие деревья

11.1 Практика

1. Покажите, как найти максимальное покрывающее дерево для графа G , т.е. такое, чей вес максимальный.
2. Пусть все ребра графа имеют различный вес. Докажите, что минимальное покрывающее дерево единственно.
3. Пусть есть взвешенный связный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной вершиной s . Все веса положительны и различны. Может ли такое быть, что какое-нибудь минимальное покрывающее дерево и какое-нибудь дерево кратчайших путей из s не имеют ни одного общего ребра? Если да, приведите пример. Если нет, докажите, что такого не может быть.
4. Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. В графе есть подмножество вершин T , которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штейнера – это связный подграф графа G минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такое дерево.
 - (a) Пусть $|T| = 3$, решить за $O(E \log V)$.
 - (b) Пусть $|T| = 4$, решить за $O(V^3)$.
5. В стране n аэропортов. Самолет может сделать перелет из аэропорта i в аэропорт j , израсходовав w_{ij} горючего. При этом w_{ij} может отличаться от w_{ji} , и $w_{ii} = 0$. Требуется найти минимальный размер бака, позволяющий добраться самолету из любого города в любой, возможно с дозаправками. Решить за $O(n^2)$.

11.2 Домашнее задание

Дедлайн: 4 декабря, 23.59

1. Дан взвешенный граф. Проверить, что минимальное по весу остовное дерево единственно. $O(E \log V)$.
2. Дан взвешенный связный граф $G = \langle V, E \rangle$. Для каждой вершины выберем самое легкое ребро. Стынем эти ребра. Повторяем процедуру пока не останется одна вершина. Докажите, что данный алгоритм строит минимальное остовное дерево за $O(E \log V)$.
3. Дан взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$ и минимальное покрывающее дерево T . Вес одного из ребер уменьшили. Нужно обновить дерево за $O(V)$.
4. (*) Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. В графе есть подмножество вершин T , которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штейнера – это связный подграф графа G минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такое дерево.
 - (a) Пусть граф – полный, и все веса удовлетворяют неравенству треугольника: $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$. Найдите дерево Штейнера, которое не больше, чем в 2 раза превышает размер минимального за $O(V^2)$.
 - (b) Пусть граф произвольный, но связный. Неравенства треугольника нет, найти 2-приближение за $O(V^3)$.

12 Практика 12. Покрывающие деревья

12.1 Практика

1. Выбрать в графе независимое множество размера не менее $\lceil \frac{n}{D+1} \rceil$, где n – количество вершин, D – максимальная степень.
2. Дан граф без рёбер на n вершинах. Приходят запросы добавить ребро e в режиме online. После каждого добавления говорить, является ли граф двудольным.
3. В каждой клетке прямой записано число 0 или 1. Поступает информация: четность числа суммы чисел на отрезке $[L_i, R_i]$. Всего запросов m . Найти первый запрос, после которого данные противоречивы.
 - (a) Решить за $O(m^2)$.
 - (b) Решить за $O(m \log^*(m))$.

12.2 Домашнее задание

Дедлайн: 11 декабря, 23.59

1. Бюрократы ставят печати. В компании есть n бюрократов. Сверху спустили поручение выполнить m заданий в заданном порядке. Задания могут быть трех типов.
 - Назначить x начальником y (гарантируется, что у y до этого начальства не было).
 - Поручить x проставить печать на документе i , где i – номер запроса. После этого x передает документ начальнику, тот ставит печать, передает начальнику и т.д. Самый главный начальник ставит печать и скормливает документ шредеру.
 - Узнать, ставил ли x печать на документе i .

Поскольку все документы порезаны на мелкие кусочки, на вас последняя надежда. Нужно ответить на все запросы за $O(m \log^*(n))$.

2. Дан ориентированный граф. Нужно за $O(n^2)$ обрабатывать запросы “добавить ребро” и “удалить ребро”. Гарантируется, что граф всегда остается ациклическим. Также нужно за $O(1)$ отвечать на запрос “есть ли путь из a в b ”? **Подсказка:** наш алгоритм будет вероятностным, давайте поддерживать $c[a, b]$ – количество путей из a в b .

13 Практика 13. Сбалансированные деревья

13.1 Практика

1. Придумать структуру данных (СД), которая поддерживает множество $S \subseteq \mathbb{N}$ со следующими операциями:

- добавить элемент x ;
- удалить элемент x ;
- найти i -ый по порядку элемент;
- найти порядок элемента x –

за $O(\log n)$.

2. Придумать СД, которая поддерживает множество $S \subseteq \mathbb{N}$ со следующими операциями:

- добавить элемент x ;
- удалить элемент x ;
- найти сумму всех чисел на отрезке $[l, r]$, лежащих в множестве S –

за $O(\log n)$.

Примечание. Можно также реализовать любую ассоциативную операцию.

3. Придумать СД, которая поддерживает множество точек $S \subseteq \mathbb{N}^2$ со следующими операциями:

- добавить точку x ;
- удалить точку x ;
- найти минимальную площадь прямоугольников, который покрывает все точки из S , чьи координаты по оси Ox лежат в отрезке $[l, r]$ –

за $O(\log n)$.

4. Дан массив a длины n . Программе приходят запросы двух типов.

- Изменить значение в ячейке $a[i]$.
- Посчитать, сколько раз достигается локальный минимум на подотрезке $[l, r]$.

Пример. На последовательности 1, 2, 3, 1, 2 минимум достигается два раза. Требуется реализовать алгоритм, обрабатывающий все запросы за $O(\log n)$.

5. (*) Дано конечное множество точек $A \subseteq \mathbb{Z}^2$, $|A| = n$. Определим уровень точки $a \in A$, как число точек из A , встречающихся в левом нижнем квадранте от x :

$$\text{lev}(a) = |\{b \in A \mid b.x \leq a.x, b.y \leq a.y\}|$$

Общей статистикой мы назовем массив s длины $n + 1$ такой, что

$$s[i] = |\{a \in A \mid \text{lev}(a) = i\}|$$

. Требуется посчитать общую статистику для множества A при условии, что

- все координаты точек от 0 до n ;
- все координаты точек от 0 до n^c для произвольной константы c .

13.2 Домашнее задание

Дедлайн: 18 декабря, 23:59, толико группа Давыдова

1. (*) Дан массив a длины n . Каждая ячейка хранит либо 0, либо 1. Программе приходят запросы двух типов.

- Поменять значение $a[i]$ ячейки.
- Для единицы i требуется найти ближайшую справа k -ую по счету единицу.

Все запросы требуется обработать за $O(\log n)$.

2. (*) Дан массив a длины n . Каждая ячейка хранит значение от 0 до n^c для произвольной константы c . Программе приходят запросы двух типов.

- Поменять значение $a[i]$ ячейки.
- Для ячейки $a[i]$ найти первый меньший $a[i]$ элемент справа (такой, что $j > i$ и $a[j] < a[i]$).

Все запросы требуется обработать за $O(\log n)$.

3. (*) Доказать, что в AVL-дереве можно вывести k подряд идущих элементов за $O(k + \log n)$.

4. (*) В качестве доп. информации в узлах AVL-деревя хранится высота вершины. Размер этого числа составляет $O(\log \log n)$ (сама высота $O(\log n)$). Предложите реализацию AVL-деревя, в каждом узле которого хранится $O(1)$ бит доп. информации.