

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

АУ, третий семестр, осень 2015 года

ГЛАВА VII. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ! Сведение кратного интеграла к повторному. Следствия о перестановке интегралов и об интеграле по элементарному множеству.

2. Две леммы: о мере непрерывного образа компакта и образе внутренности, замыкания и границы.

3. Лемма о приближении линейным преобразованием.

4. Теорема о геометрическом смысле модуля якобиана.

5. ! Теорема о замене переменной в кратном интеграле (случаи куба и конечного объединения кубов).

6. Лемма о предельном переходе по множествам. Теорема о замене переменной в кратном интеграле (случай измеримого множества).

7. Примеры применения теоремы о замене переменной: сдвиг, линейная замена. Вычисление объема n -мерного шара.

8. Полярная и сферическая замена переменных. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

ГЛАВА VIII. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9. ! Определение и простейшие свойства интеграла по длине дуги (корректность определения, линейность, аддитивность, натуральная параметризация).

10. Неравенства с интегралами по длине дуги. Интегральная сумма для интеграла по длине дуги.

11. ! Определение и простейшие свойства интеграла от формы (корректность, смена ориентации, линейность, аддитивность).

12. Связь интеграла от формы и интеграла по длине дуги (равенство и неравенство). Интегральная сумма для интеграла от формы.

13. ! Первообразная формы. Аналог формулы Ньютона–Лейбница. Необходимые и достаточные условия существования первообразной.

14. ! Формула Грина. Формулы для вычисления площади.

ГЛАВА IX. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

15. ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.

16. Свойства несобственных интегралов.

17. ! Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

18. ! Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

19. Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$.

20. Последовательности множеств, монотонно исчерпывающие открытое множество. Определение несобственного кратного интеграла.

21. Несобственный кратный интеграл от неотрицательной функции. Признак сравнения.

22. Абсолютная сходимость. Равносильность абсолютной и обычной сходимости для несобственных кратных интегралов.

ГЛАВА X. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

23. Сходимость рядов. Примеры. Простейшие свойства.

24. ! Необходимое условие сходимости рядов. Критерий Коши.

25. Группировка членов ряда. Свойства.

26. ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

27. ! Признак Коши. Примеры.

28. ! Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

29. Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак. Сходимость и расходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

30. ! Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Условно сходящиеся ряды.

31. Преобразование Абеля. Сумма гармонических чисел. Признак Дирихле.

32. Сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$.

Признак Абеля.

33. ! Признак Лейбница. Оценка суммы знакопередающегося ряда. Примеры.

34. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда.

35. Теорема Римана.

36. Теорема Коши. Произведение рядов. Теоремы Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

37. ! Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

38. Произведение равномерно ограниченной и равномерно сходящейся последовательностей. Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

39. ! Равномерный предел непрерывных функций.

40. Пространство $C(K)$. Определение и полнота.

41. ! Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

42. Критерий Коши. Признак сравнения. Следствия. Примеры.

43. Признаки Абеля, Дирихле и Лейбница.

44. Теорема о непрерывности равномерно сходящегося ряда. Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

45. Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

46. ! Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус и круг сходимости.

47. Теорема о существовании радиуса сходимости и поведении ряда в круге сходимости. Примеры.

48. Вторая теорема Абеля. Непрерывность суммы ряда.

49. Формула Коши–Адамара.

50. Аналитические функции. Лемма о радиусах сходимости. Свойства.

51. Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

52. ! Определение e^z , $\sin z$ и $\cos z$. Свойства.

53. Ряд Тейлора для $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$.

54. Ряд Тейлора для $(1+x)^p$ и $\operatorname{arcsin} x$.

ГЛАВА XI. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

55. ! Определение простой, гладкой и кусочно-гладкой поверхностей. Допустимая параметризация. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Независимость от параметризации.

56. ! Ориентация гладкой поверхности. Согласование ориентации поверхности и края. Ориентация кусочно-гладкой поверхности.

57. Определение площади поверхности и формула для ее вычисления.

58. Первая квадратичная форма поверхности. Свойства. Частные случаи.

59. ! Определение поверхностного интеграла по площади (I рода) для простой гладкой поверхности. Независимость от параметризации.

60. Определение поверхностного интеграла по площади (I рода) для кусочно-гладкой поверхности. Свойства. Сферические координаты.

61. Внешние и дифференциальные формы.

62. Внешнее произведение 1-форм. Формула его для вычисления. Разложение 2-формы в \mathbb{R}^n по базису.

63. Перенос формы. Свойства. Перенос формы $P dx + Q dy$.

64. ! Определение поверхностного интеграла от формы (II рода) для простой гладкой и для кусочно-гладкой поверхностей. Корректность определения.

65. Векторное поле в \mathbb{R}^3 . Поток поля через поверхность. Связь поверхностных интегралов I и II рода.

66. ! Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция поля.

67. ! Формула Стокса. Ротор векторного поля. Дифференциал формы.

ПРИМЕЧАНИЯ

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают с доказательством один вопрос из второй части (23–67). **Сдача коллоквиума не освобождает от необходимости знать формулировки из обеих частей курса.**

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: связь между кратными интегралами и повторными; формула замены переменной в кратном интеграле; определение криволинейных интегралов по длине дуги и от формы; формула Грина; определение несобственного интеграла; признак сравнения; сходимость ряда; необходимое условие сходимости ряда; признак сравнения; признаки Даламбера и Коши; абсолютная сходимость рядов; признак Лейбница; определение произведения рядов; поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности и ряда; условия почленной дифференцируемости и интегрируемости функционального ряда; радиус и круг сходимости степенного ряда; ряды Тейлора для элементарных функций; определение поверхности; определение поверхностных интегралов I и II рода; формулы Гаусса–Остроградского и Стокса.