

**Курс: Функциональное программирование**  
**Практика 1. Чистое лямбда-исчисление как язык**  
**программирования**

**Разминка**

► Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$\begin{aligned}x y (\lambda z y. z x (w x) y) & \quad [x := w (\lambda x. w x)] \\x y (\lambda z y. z x (w x) y) & \quad [y := w (\lambda x. w x)] \\x y (\lambda z y. z x (w x) y) & \quad [z := w (\lambda x. w x)] \\x y (\lambda z y. z x (w x) y) & \quad [x := w (\lambda x. y x)]\end{aligned}$$

Определите, возможно ли в получаемся терме выполнить  $\beta$ -преобразование.

► Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$ -преобразование

$$((\lambda z.(z (y z))) (z x) z)$$

**Булевы значения** можно определить так:

$$\begin{aligned}\text{tru} & \equiv \lambda t f. t \\ \text{fls} & \equiv \lambda t f. f\end{aligned}$$

Стандартные булевы операции кодируются так:

$$\begin{aligned}\text{iif} & \equiv \lambda b x y. b x y \\ \text{not} & \equiv \lambda b. b \text{ fls tru} \\ \text{and} & \equiv \lambda x y. x y \text{ fls} \\ \text{or} & \equiv ??? \text{ (упражнение)}\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства условного выражения выполняются:

$$\begin{aligned}\text{iif tru } v \ w & = v; \\ \text{iif fls } v \ w & = w.\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства логического оператора «И» выполняются:

$$\begin{aligned}\text{and tru } w & = w; \\ \text{and fls } w & = \text{fls}.\end{aligned}$$

► Попробуйте найти более «короткую» версию оператора «НЕ».

► Реализуйте оператор «ИЛИ».

**Пару** (двухэлементный кортеж) можно определить так:

$$\text{pair} \equiv \lambda x y f. f x y$$

Стандартные операции для пары (проекции):

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda p. p \text{ tru} \\ \text{snd} &\equiv \lambda p. p \text{ fls}\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства проекций выполняются:

$$\begin{aligned}\text{fst} (\text{pair } a \ b) &= a; \\ \text{snd} (\text{pair } a \ b) &= b.\end{aligned}$$

**Числа** (нумералы Чёрча)

$$\begin{aligned}0 &\equiv \lambda s z. z \\ 1 &\equiv \lambda s z. s z \\ 2 &\equiv \lambda s z. s (s z) \\ 3 &\equiv \lambda s z. s (s (s z)) \\ 4 &\equiv \lambda s z. s (s (s (s z))) \\ &\dots\end{aligned}$$

Выражение  $F^n(X)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $F, X \in \Lambda$ , определим индуктивно:

$$\begin{aligned}F^0(X) &\equiv X; \\ F^{n+1}(X) &\equiv F(F^n(X)).\end{aligned}$$

Тогда  $n$ -ое число Чёрча :

$$n \equiv \lambda s z. s^n(z).$$

Проверка числа на ноль ( $0 \equiv \lambda s z. z$ ):

$$\text{iszro} \equiv \lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{ tru}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.
- Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

Функция следования для чисел Чёрча

$$\text{succ} \equiv \lambda n s z. s (n s z)$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.
- Попробуйте найти другое определение `succ`.

Функция сложения чисел Чёрча

$$\text{plus} \equiv \lambda m n s z. m s (n s z)$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `plus` выполняются.
- Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ`.

Функция умножения чисел Чёрча

$$\text{mult1} \equiv \lambda m n. m (\text{plus } n) 0$$

$$\text{mult2} \equiv \lambda m n s z. m (n s) z$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства умножения выполняются.
- ▶ Можно ли `mult2` записать короче?

### Домашнее задание

- ▶ Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$\lambda y z. x y w (z x) \quad [x := \lambda y. y w]$$

$$\lambda x y. x y (\lambda x. x y) x \quad [x := \lambda z. z]$$

$$x y (\lambda x z. x y z) y \quad [y := x z]$$

Определите, возможно ли в получшемся терме выполнить  $\beta$ -преобразование. (1 балл)

- ▶ Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$ -преобразование

$$(x (\lambda x. ((x y) x)) y) \\ ((\lambda p. (\lambda q. ((q (p r)) s))) ((q (p r)) s))$$

(1 балл)

- ▶ Покажите, что для любых  $M$  и  $N$  выполняется

$$\lambda x. M N = S (\lambda x. M) (\lambda x. N)$$

(1 балл)

- ▶ Покажите, что

$$S K K = I \\ B = S (K S) K$$

(2 балла)

- ▶ Реализуйте функцию возведения в степень для чисел Чёрча. (2 балла)