17 декабря 2017

Количество баллов на зачет: *8*

1. *(1.5 балла)* Покажите, что любая симметрическая функция(зависит только от количества единиц у входа) вычислима схемой размера $5n + o(n)$.

2. a. *(1 балл)* Докажите, что в любом базисе у любой формулы размера n найдется подформула размера от $\frac{1}{2c}n$ до $(1 - \frac{1}{2c})n$, где c — максимальное количество аргументов у функций из базиса.

   b. *(1.5 балла)* Докажите, что для любого базиса верно, что формулу размера n можно записать как формулу не глубже $O(\log n)$.

   c. *(1.5 балла)* Докажите, что для любых двух базисов существует полином P (зависящий от базисов), что минимальный размер формулы S_1 в первом базисе меньше $P(S_2)$, где S_2 — минимальный размер формулы во втором базисе.

3. *(2.5 балла)* Определить, что вход содержит более одной единицы с помощью схемы размера $2n + o(n)$.

4. *(по 1 баллу)* Докажите, что следующие формулы, а также обратные к ним (меняем местами посылку и заключение) являются теоремами исчисления высказываний:

$$((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge C),$$

$$((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C).$$

5. *(1 балл)* Выведите формулы $A \to \neg\neg A$ и $\neg\neg\neg A \to \neg A$.

6. *(1.5 балла)* Докажите, что наличии аксиомы исключенного третьего (11) аксиома (10) является лишней – её можно вывести из остальных аксиом.

7. *(2 балла)* Добавим к исчислению высказываний, помимо правила modus ponens, еще одно правило, называемое правилом подстановки. Оно разрешает заменить в выведенной формуле все переменные на произвольные формулы (естественно, вхождения одной переменной должны заменяться на одну и ту же формулу). Покажите, что после добавления такого правила класс выводимых формул не изменится, но теорема о дедукции перестанет быть верной.

8. *(1 балл)* Докажите, что формула $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ является теоремой исчисления высказываний.