Рекуррентные формулы. Дискретная вероятность.

1. Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

2. Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

3. Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

4. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка $a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 4\,a_n + 3\cdot 2^n$. Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

5. Доказать, что любые два последовательно идущих друг за другом числа Фибоначчи F_n и F_{n+1} взаимно простые.

6. Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

$$F_{n+m} = F_{n-1}\,F_m + F_n\,F_{m+1};$$
$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n};$$
$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n\,F_{n+1}.$$

7. Рассмотрим лотерею “пять из тридцати шести”, победителем которой является человек, правильно угадавший пять из тридцати шести чисел $1, 2, \ldots, 36$. Определить вероятность того, что какой-то наугад выбранный набор из пяти чисел выиграет.

8. Вычислить вероятность того, что при игре в лотерею “пять из тридцати шести” в произвольно выбранном наборе из пяти чисел хотя бы одно будет правильным.

9. Три студента решают независимо друг от друга одну и ту же задачу. Вероятности решения студентами этой задачи равны, соответственно, 0.8, 0.7 и 0.6. Найти вероятность того, что хотя бы один из них решит задачу.

10. Монету подбрасывают три раза. Нам не показывают результат, но говорят, что решка выпала хотя бы один раз. Какова вероятность того, что решка выпала все три раза?

11. Доказать, что возможна, вообще говоря, фибоначчиева система исчисления, показав, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.

12. По статистике, 30% из общего количества студентов, которым читается данный курс, сдают экзамен с первой попытки и в срок, 50% с первой попытки его не сдают, но успевают пересдать экзамен в течение основной сессии, а оставшиеся 20% либо вовсе экзамен не сдают, либо сдают его в допсессию. Известно, что среди студентов первой группы 95% успешно заканчивают свое обучение в университете, среди студентов второй группы эта величина составляет 60%, а среди тех, кто в основную сессию данный курс не сдал, доля получивших в итоге диплом составляет 20%. Определить процент студентов, успешно защищающих диплом, по отношению к общему числу поступивших студентов.

13. Игральная кость подбрасывается десять раз. Какова вероятность трехкратного выпадения шестерки?

14. Предположим, что тест на наркотики дает 99% истинно положительных результатов для людей, употребляющих наркотики, и 98.5% истинно отрицательных результатов для людей, наркотики не употребляющих. Предположим, что в мире существует $0,5\%$ наркоманов. Предположим, что произвольно выбранный тест показал положительный результат на употребление наркотиков. Какова вероятность того, что человек, сдавший тест, действительно является наркоманом?