

Задания

30 марта 2017 г.

1. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.
2. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \rightarrow M$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории \mathbf{Set} . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

3. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \rightarrow M$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot y$
- $0 \cdot x = 0$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории \mathbf{Set} . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

4. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

```
data Term a = Var a | App (Term a) (Term a) | Lam (Term (Maybe a))
```

Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.

5. Пусть $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-alg} \rightarrow \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T .

6. Докажите, что категория Клейсли \mathbf{Kl}_T эквивалентна полной подкатегории $T\text{-alg}$ на свободных T -алгебрах.
7. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.