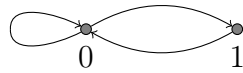


Информация по Хартли. Логика знания.

16 февраля 2017 г.

1. Сколько информации вмещает трехзначное число?
2. Докажите, что вероятность сжатия двоичного файла (любым данным) архиватором хотя бы на один байт не превосходит $\frac{1}{256}$.
3. Сколько нужно взвешиваний, чтобы упорядочить N камней по весу? Найдите точный ответ на этот вопрос для $N = 2, 3, 4, 5$. Указание: воспользуйтесь жадной стратегией, при которой каждое взвешивание приносит максимум информации.
4. За 4 взвешивания одну найти фальшивую монету из 12, если её относительный вес неизвестен. Указание: воспользуйтесь „жадной“ стратегией, при которой каждое взвешивание приносит максимум информации.
5. Среди одинаковых на вид n камешков один радиоактивен. Имеется счетчик Гейгера, позволяющий выяснить, есть ли радиоактивный камешек в любой группе камешков. Докажите, что необходимо и достаточно $\log n$ применений счетчика Гейгера для нахождения радиоактивного камня.
6. Дано пять монет разного веса и известно, что первая монета легче второй, а третья легче второй и четвертой. Имеются весы, позволяющие сравнить по весу любые две монеты. Доказать, что для того, чтобы упорядочить по весу все монеты, необходимо и достаточно 5 взвешиваний.
7. Имеются 24 монеты, среди которых ровно одна фальшивая (неизвестно какая). Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая легче или тяжелее. На чашечных весах можно сравнивать по весу любые две группы монет. Нужно найти фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее. Докажите, что необходимо и достаточно сделать 4 взвешивания.

8. Даны две группы камешков, причем камешки в каждой группе упорядочены по весу. В первой группе n камешков, а во второй m . Требуется упорядочить все камешки по весу. Докажите, что для этого достаточно сделать $m + n - 1$ взвешиваний. Докажите, что необходимо сделать $\log \binom{m+n}{m}$ взвешиваний.
9. Имеется неизвестное число от 1 до n (где $n > 1$). Разрешается задавать любые вопросы с ответами ДА/НЕТ. При этом при ответе ДА мы платим 2 рубля, а при ответе НЕТ 3 рубля. Сколько необходимо и достаточно заплатить для отгадывания числа?
10. Пусть L_n — множество путей длины n в графе.



Чему равен предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi(L_n)}{n}$?

11. Пусть загадано число от 1 до N . Можно задавать любые вопросы на ДА/НЕТ. Сколько вопросов потребуется, если на один ответ можно дать неверный ответ, а вопросы (а) можно задавать адаптивно; (б) нужно написать заранее?
12. Первый игрок задумал число x от 1 до n . На своем ходу второй игрок задает ему вопросы вида: “верно ли, что $x \leq k$ ” выбирая конкретное k по своему усмотрению. После каждого такого хода первый игрок обязан ему ответить на этот вопрос утвердительно, если в самом деле задуманное число меньше или равно k , и может дать любой ответ (ДА/НЕТ) иначе. В конце игры второй игрок должен найти x при условии, что общее количество ошибочных ответов, данных первым игроком, не превысило сотую часть от общего количества заданных ему вопросов. Докажите, что второй игрок может справиться с этой задачей, задав не более $O(\log n)$ вопросов.
13. Вова загадал число $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и сообщил Алене ($\lfloor x/2 \rfloor \bmod 3$), а Боре ($\lceil x/2 \rceil \bmod 3$). При каких значениях x Боря знает, что $x > 1$? При каких значениях x Алена знает, что он это знает? При каких значениях x Алена знает, что он этого не знает?
14. Вова загадал число $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и сообщил Алене ($\lfloor x/2 \rfloor \bmod 3$), а ($\lceil x/2 \rceil \bmod 3$). При каких значениях x Алена знает, что

$x < 3$? При каких значениях x Боря знает, что она это знает? При каких значениях x Боря знает, что она этого не знает?

15. Вова загадал число $x \in 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ и сообщил Алёне $(\lfloor x/2 \rfloor)$, а Боре $(\lceil x/2 \rceil)$. При каких значениях x Алёна знает, что x не делится на 3? При каких значениях x Боря знает, что она это знает? При каких значениях x Боря знает, что она этого не знает?
16. Имеется карточка, на одной стороне которой написано некоторое целое неотрицательное число n , а на другой $n+1$. Алёна видит одну из двух сторон карточки, а Боря другую. Происходит следующий диалог.
- (а) Алёна: “Я знаю, что ты не знаешь моего числа”. Боря: “Теперь я знаю твоё число”.
- (б) Алёна: “Я не знаю твоего числа”. Боря: “А я это и без тебя знал”. Алёна: “Ага, теперь я знаю твоё число”. В какой ситуации возможен каждый из диалогов (какая карточка у Алёны и Бори)?
17. Три джентльмена заходят в комнату, в которой имеется три красных и две белых шляпы (которые они видят). Внезапно выключается свет, и в темноте каждый джентльмен надевает одну шляпу, цвета которой он не видит. После включения света происходит следующий диалог.
- (а) Первый: “Я знаю, что никто не знает, какая на нём шляпа”. Второй: “А я этого не знал”.
- (б) Первый: “Я знаю, что третий не знает цвета своей шляпы”. Второй: “Даже теперь я не знаю цвета моей шляпы”. В какой ситуации возможен каждый из диалогов?