DL 11. Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ называется монотонной, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$). Докажите, что:

а) если пропозициональная формула использует только связки $\vee$ и $\wedge$, то задаваемая ей булева функция монотонна;

б) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

DL 12. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса $\downarrow$: результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера $\uparrow$: результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.

Определение 1. Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу 1, конъюнкцию $\wedge$ и сумму по модулю два $\oplus$ (приоритет $\wedge$ выше, чем $\oplus$). Мономом будем называть константу 1 и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида $m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k$, где m_i — различные мономы, $k \geq 0$. Пример: $x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus 1$.

DL 13.

а) Представьте в виде многочлена Жегалкина $\vee, \wedge$ и $\neg$.

б) Докажите, что любая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина.

в) Докажите, что такое представление единственное с точностью до перестановки мономов.

Определение 2. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \ldots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0,1\}$.

DL 14. (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть не монотоная, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0,\ldots,0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1,\ldots,1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что:

а) с помощью композиций этих функций можно получить отрицание, константу 1, константу 0;

б) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;

в) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 15. Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

DL 16. Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n и их не меньше 2^{n-1}.

DL 17. Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.