

Композиция обыкновенных производящих функций. Разбиение числа на произвольное число слагаемых.

15 мая 2017 г.

1. Рота из n солдат выстроена в шеренгу. Командир разбивает шеренгу в произвольном количестве мест, создавая тем самым несколько отрядов. После этого, часть отрядов он отправляет на дежурство. Сосчитать количество способов совершить такие комбинаторные действия с использованием производящих функций.
2. Придумать комбинаторное доказательство для результата, полученного при решении предыдущего упражнения.
3. Построить производящую функцию для числа битовых строк длины n , в которых между любыми двумя единицами стоит по меньшей мере два нуля.
4. Вывести линейное рекуррентное соотношение для коэффициентов производящей функции, полученной в предыдущем упражнении.
5. Описать алгоритм, позволяющий получить решение рекуррентного соотношения

$$h_n = h_{n-4} + h_{n-6} - h_{n-14} - h_{n-16} + h_{n-20}, \quad (1)$$

за время $O(\log n)$ при условии, что арифметические действия над длинными числами выполняются за константное время.

6. Доказать, что один рубль можно разменять монетами в две и пять копеек большим количеством способов, чем монетами достоинством в три и пять копеек.

7. Сколько существует способов выбора 20 объектов из множества объектов пяти типов при условии, что количество объектов первого типа кратно пяти, второго — трем, объектов третьего типа следует выбирать не более четырех, четвертого — не менее трех, пятого — не более двух?
8. Доказать, что количество разбиений n на слагаемые, каждое из которых повторяется не более трёх раз, совпадает с количеством разбиений n , в которых повторяться могут только нечётные слагаемые.
9. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров красного, синего, белого и черного цветов при условии, что красные шары выбираются по одному за раз, синего — по четыре за раз, белого — по пять за раз и черного — по три за раз?
10. Дать комбинаторное доказательство теоремы про представления числа в виде суммы нечетных чисел.