$\boxed{\textbf{DL 4.5.}}$ **(Топологическая сортировка)** Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

$\boxed{\textbf{DL 5.6.}}$ Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S. Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

$\boxed{\textbf{DL 7.3.}}$

b) Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.

c) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n.

d) Покажите, что $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

$\boxed{\textbf{DL 7.6.}}$

a) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

b) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

$\boxed{\textbf{DL 8.2.}}$

b) Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n - k$ рёбер, то в нем как минимум k компонент связности.

$\boxed{\textbf{DL 8.3.}}$ Дана сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрешается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка не развалилась на части?

$\boxed{\textbf{DL 8.4.}}$ В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

$\boxed{\textbf{DL 8.5.}}$ Докажите, что из произвольного связного графа можно удалить вершину и все выходящие из неё рёбра так, чтобы оставшийся граф был связным.

$\boxed{\textbf{DL 8.6.}}$ В связном графе на каждом ребре написали положительное вещественное число. Вес остовного дерева — это сумма чисел на рёбрах, содержащихся в этом дереве. Докажите, что:

a) минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса;

b) каждое ребро минимального веса содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.

$\boxed{\textbf{DL 9.1.}}$ Пусть каждая вершина неориентированного графа имеет степень не больше, чем k. Докажите, что вершины графа можно покрасить

b) в $[k/2] + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

$\boxed{\textbf{DL 9.6.}}$ В школе в каждом кружке учится $n \geqslant 4$ человек, число кружков не превосходит $\frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажите, что можно всем школьникам выставить оценки по поведению (четыре оценки: от 2 до 5), что в каждом кружке будут представлены все 4 оценки.

DL 10.1. В классе учатся n мальчиков и n девочек, каждому мальчику нравится несколько девочек из класса (возможно, что двум мальчикам нравится одна и та же девочка). Злая учительница рассадила детей за парты мальчик-девочка случайным образом (все варианты рассадки равновероятны). Чему равняется математическое ожидание числа мальчиков, которые сидят с нравившейся ему девочкой за одной партой?

DL 10.2. Каждый из k человек в лифте, который стоит на первом этаже выбирает случайный этаж равновероятно из оставшихся n этажей. Чему равняется математическое ожидание числа остановок, которые сделает лифт?

DL 10.3.

a) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.

DL 11.1. Покажите, что если $H[X] \leqslant t$, то найдется такое значение b, что $\Pr[X = b] \geqslant 2^{-t}$.

DL 11.2. Рассмотрим функцию $h(p) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$, функция определена на $[0, 1]$, $h(0) = h(1) = 0$. Покажите, что:

a) $h(p)$ строго возрастает на $[0, \frac{1}{2}]$ и убывает на $[\frac{1}{2}, 1]$;

b) h выпукла вверх.

DL 11.3. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ — это глубины всех листьев дерева. Докажите, что:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$;

b) если $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$, то найдётся дерево из n листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

DL 11.4. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Покажите, что:

a) глубина хотя бы одного листа не меньше $\log n$;

b) средняя глубина листа не меньше $\log n$.

(Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает его глубину; докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log n$.)

DL 12.1. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

DL 12.2. Покажите, что для любой случайной величины X выполнено:

a) $D[X] = E[X^2] - E[X]^2$;

b) $\Pr[X = 0] \leqslant \frac{D[X]}{E[X]^2}$.

DL 12.3. **(Коды Уолша-Адамара)**

a) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathtt{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathtt{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $\mathtt{WH}(a)$ и $\mathtt{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

DL 12.4. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\Pr_r[f(x) = C(x,r)] \geqslant \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. Покажите, что:

a) для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\Pr_r[f(x) = C(x,r)] \geqslant 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями;

b) найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

DL 13.1. Пусть X — неотрицательная случайная величина, которая не равна тождественно нулю. Докажите, что $\Pr[X > 0] \geqslant \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$.

DL 13.6. Докажите, что из любых 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых, а из любых 10 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

DL 14.1. Дана система из n линейных уравнений. Докажите, что система несовместна тогда и только тогда, когда линейными комбинациями из этих уравнений можно получить $0 = 1$. (В решении нельзя без доказательства пользоваться теоремами линейной алгебры, если вы их еще не изучали в Академическом университете).

DL 14.2. Найдите цены игр и оптимальные стратегии для матричных игр, которые задаются такими матрицами:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

DL 14.3. Рассмотрим вещественную матрицу $m \times n$. Седловым элементом матрицы называется элемент, который является минимальным (или одним из минимальных) в своей строке и максимальным (или одним из максимальных) элементов своего столбца. Покажите, что

a) если седловых элементов несколько, то они все равны;

b) если в матрице есть седловой элемент, то он равен цене игры.