

Treewidth III (ДЗ).

11 ноября 2017 г.

1. Известно, что в графе существует клика размера αn , где α фиксированное число большее $\frac{1}{2}$. Постройте алгоритм с временем работы $O^*((2-\epsilon)^n)$, который бы находил в таких графах наибольший индуцированный интервальный подграф. Граф называется интервальным если можно установить взаимнооднозначное соответствие между вершинами графа и интервалами прямой, так что вершины имеют общее ребро тогда и только тогда когда соответствующие отрезки пересекаются.
2. Известно, что в графе существует клика размера αn , где α фиксированное число большее 0. Постройте алгоритм с временем работы $O^*((2-\epsilon)^n)$, который бы находил в таких графах наибольший индуцированный хордальный подграф. Граф называется хордальным если он не содержит индуцированных циклов длины 4 и более.
3. Пусть T дерево. Покажите, что $pw(t) \geq k + 1$ тогда и только тогда когда существует вершина $u \in T$ и ее соседи v_1, v_2, v_3 такие, что $pw(T_{uv_1}), pw(T_{uv_2}), pw(T_{uv_3}) \geq k$. Где T_{uv_i} — это максимальное поддерево T содержащее вершину v_i , но не содержащее вершину u .
Hint: рассмотрите ребра uv , такие что $pw(T_{uv}), pw(T_{vu}) \geq k$. Рассмотрите граф полученный объединением таких ребер, покажите что имеет смысл рассматривать только случай когда этот граф путь.
4. Для заданной функции $f : 2^U \rightarrow \mathbf{Z}_{+,0}$ найдите за $2^n \log^2 M \text{poly}(n)$ время f -width множества U , где $|U| = n$ и $f(S) \leq M$ для любого $S \subseteq U$. f -width равняется $\min_T \max_{T_v \in T} f(T_v)$, здесь минимум берется по всем бинарным деревьям и в листьях у дерева указаны элементы U , а максимум по всем полным поддеревьям с корнем в вершине v .
Hint: Используйте бинарный поиск вначале постройте алгоритм, который определяет верно ли, что f -width меньше заданного t .
5. Докажите, что множество вершин любого минимального сепаратора не совпадает ни с каким множеством вершин максимальной потенциальной клики.
Hint: Покажите, что если в клика содержит сепаратор, то в клики есть хотя бы еще одна вершина.