Курс: Математическая логика и теория вычислимости
Практика 6,7. Общезначимые формулы; вывод в исчислении предикатов

Общезначимые формулы логики предикатов

► Будет ли корректной подстановка $x := \tau$ в формулу φ

$$\tau = f(y, z) \qquad \varphi = \forall y \neg P(x, y) \wedge Q(x, z)$$

$$\tau = g(x, y) \qquad \varphi = P(x, y) \to \exists y Q(y)$$

Формулы, полезные для построения ПНФ:

$$\neg \forall x \varphi \ \leftrightarrow \ \exists x \neg \varphi$$

$$\neg \exists x \varphi \ \leftrightarrow \ \forall x \neg \varphi$$

$$\forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x) \ \leftrightarrow \ \forall x (\varphi(x) \wedge \psi(x))$$

$$\exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x) \ \leftrightarrow \ \exists x (\varphi(x) \vee \psi(x))$$

$$\exists x \varphi(x) \wedge \psi \ \leftrightarrow \ \exists x (\varphi(x) \wedge \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x \varphi(x) \vee \psi \ \leftrightarrow \ \forall x (\varphi(x) \vee \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x \varphi(x) \to \psi \ \leftrightarrow \ \forall x (\varphi(x) \to \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x \varphi(x) \to \psi \ \leftrightarrow \ \exists x (\varphi(x) \to \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\psi \to \forall x \varphi(x) \ \leftrightarrow \ \forall x (\psi \to \varphi(x)), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\psi \to \exists x \varphi(x) \ \leftrightarrow \ \exists x (\psi \to \varphi(x)), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x \varphi(x) \to \exists x \psi(x) \ \leftrightarrow \ \exists x (\varphi(x) \to \psi(x))$$

▶ Постройте ПНФ формул и сколемизируйте результат до Π_1 и до Σ_1

$$\neg\exists x \forall y \exists z \forall u P(x, y, z, u)$$

$$\exists x \forall y Q(x, y) \land \exists x \forall y R(x, y)$$

(ДЗ) Постройте ПНФ формул и сколемизируйте результат до Π_1 и до Σ_1

$$\exists x \forall y Q(x, y) \lor \exists x \forall y R(x, y)$$

$$\exists x \forall y Q(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$$

$$\exists x \forall y P(y) \to \neg\exists z S(z) \land \exists y Q(x, y)$$

Вывод из аксиом в исчислении предикатов

В исчислениии предикатов к унаследованным от исчисления высказываний 11 аксиомам добавляются новые аксиомы:

12. $\forall x\varphi \to \varphi(x := \tau)$
13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x\varphi$

(Требуется, чтобы подстановка $x := \tau$ была корректной.) Кроме того, помимо *Modus Ponens*, имеются два новых правила вывода — *правила Бернайса*:

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x\varphi} \quad (\mathrm{B}\forall)$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi} \quad (\mathrm{B}\exists)$$

(Требуется, чтобы переменная x не была свободна в ψ.) Допустимо производное *правило обобщения*:

$$\frac{\varphi}{\forall x\varphi} \qquad (\mathrm{Gen})$$

▶ Выведите формулу

$$\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$$

▶ Проверьте допустимость производных правил

$$\frac{\varphi \to \psi}{\forall\varphi \to \forall\psi}$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists\varphi \to \exists\psi}$$

▶ (ДЗ) Выведите формулы

$$\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$$

$$\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$