DL 1. Докажите следующие равенства:

а) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3}$;

в) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

DL 2. Докажите неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для всех натуральных n и вещественных $x \geq -1$.

DL 3. Есть гири весом $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$. Докажите, что любой груз в промежутке от 1 до $2^n - 1$ можно уравновесить единственным образом.

DL 4. (Коды Грея) Докажите, что все бинарные строки длины n (т.е. множество $\{0, 1\}^n$) можно выписать подряд, так что каждая следующая строка отличается от предыдущей ровно в одном символе.

DL 5.

а) На плоскости нарисовано несколько окружностей, докажите, что области, на которые эти окружности разбивают плоскость можно покрасить в черный и белые цвета в шахматном порядке.

б) Дано изображение плоского Эйлерова графа (степени всех вершин четны, ребра не пересекаются). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (соседние по ребру грани покрашены в разные цвета).

DL 6. В неориентированном графе $2n$ вершин и нет треугольников (циклов длины 3). Докажите, что число ребер в нем не превосходит n^2, причем оценка n^2 достигается.

DL 7. Дана однородная линейная система от n переменных (т.е. система, состоящая из уравнений вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$), в которой меньше, чем n уравнений. Докажите, что система имеет ненулевое решение.

DL 8. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

DL 9. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, каждый не на своем месте. Билетер может попросить поменяться местами любых двух соседей, и так много раз. Однако любой зритель, попав на свое место, затем пересаживаться отказывается. Докажите, что билетер всегда может рассадить всех по своим местам.

DL 10. В группе есть несколько студентов, для них было прочитано n лекций. Известно, что для каждых k лекций найдется хотя бы k студентов, которые посетили хотя бы одну из этих лекций. Докажите, что для каждой лекции можно выделить по одному студенту, который посетил эту лекцию, а для разных лекций выделенные студенты были бы разными.