Домашнее задание #7, 15.05

1. Дан набор линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, написать программу, которая

   (1б) Находит ортогональный базис $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$.

   (1б) Для симметричной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ строит A-ортогональный базис $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$.

2. (2б) Написать программу, которая строит многочлен степени n с младшим коэффициентом 1, имеющий наименьшую норму в $L_2([-1,1])$, т. е. минимизировать по $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\int_{-1}^{1} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i\right)^2 dx$$

3. Написать программу, решающую систему

$$Ax = b$$

   (2б) Для квадратной симметричной положительно [полу-]определнной матрицы A с использованием метода сопряженных градиентов.

   (2б) Для произвольной вещественной матрицы A.

4. Реализовать класс для матриц [и векторов], позволящий умножать матрицу на вектор за время $\mathcal{O}(n+m)$, где n – размер вектора, m – количество ненулевых элементов в матрице и решить с его помощью систему $Ax = b$ за $\mathcal{O}(nm)$

   (2б) Для квадратной симметричной положительно [полу-]определнной матрицы A с использованием метода сопряженных градиентов.

   (1б) Для произвольной вещественной матрицы A.

5. (2б) Дан орграф $G = \langle V, E \rangle$, $|V| = n$, $|E| = m$ и вектор $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Найти такой набор весов ребер $(\omega_{ij})_{(i,j) \in E}$, для которого выполняется

$$\sum_{j \in in(i)} \omega_{ji} - \sum_{j \in out(i)} \omega_{ij} = \sigma_i,$$

   где $in(i)$, $out(i)$ – множества входящих в i и выходящих из i соответственно.