DL 13.1. Пусть X — неотрицательная случайная величина, которая не равна тождественно нулю. Докажите, что $\Pr[X > 0] \geqslant \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$.

DL 13.2. Пусть $\mathbb{F}$ — поле остатков по простому модулю p. Выбираются случайно независимо два элемента $a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Покажите, что для любых $x, y \in \mathbb{F}$, если $x \neq y$, то случайные величины $ax + b$ и $ay + b$ являются независимыми.

DL 13.3. Дан связный неориентированный граф G без кратных ребер и петель, с числом вершин $n > 2$. Каждое ребро графа независимо покрасили в черный или белый цвет равновероятно. Случайная величина X равняется числу вершин, из которых исходит четное число черных ребер. Вычислите:

a) $E[X]$;
b) $D[X]$.

DL 13.4. Пусть $C : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$ — код Хэмминга. Проверьте, что он является линейным кодом, то есть выполнено $C(x + y) = C(x) + C(y)$; сумма векторов — покомпонентная по модулю 2.

DL 13.5. **(The Hat Problem)** В комнате находятся n мудрецов. На каждом мудреце находится колпак чёрного или белого цвета. Колпаки выдаются случайным образом независимо друг от друга. Каждый мудрец может видеть колпаки всех остальных мудрецов, но не может видеть свой. Каждого мудреца спрашивают, не хочет ли он попробовать угадать цвет своего колпака. Мудрец может попробовать или отказаться. Каждый мудрец делает выбор, не зная ответы остальных людей. Выигрывают или проигрывают мудрецы вместе. Они выигрывают, если все, кто решил отвечать отвечают верно, и хотя бы один мудрец отвечает. Во всех других случаях мудрецы проигрывают. Стратегия в игре — это набор функций: каждый мудрец, используя свою функцию, в зависимости от цветов колпаков остальных мудрецов решает, что отвечать.

a) Назовём граф G ориентированным подграфом n-мерного гиперкуба, если его вершины соответствуют бинарным строкам длины n, и если существует ребро $u \to v$, то строки u, v различаются не более, чем в одном бите. Пусть $K(G)$ — количество вершин в графе G со входящей степенью не менее 1 и исходящей 0. Покажите, что максимальная вероятность победы в игре (по всем стратегиям) равна максимуму величины $K(G)/2^n$ по всем выборам подграфа n-мерного гиперкуба.
b) Используя факт, что исходящая степень вершин не превосходит n, покажите, что $K(G)/2^n \leqslant \frac{n}{n+1}$ для любого графа G, являющегося ориентированным подграфом n-мерного гиперкуба.
c) Покажите, что если $n = 2^l - 1$, то существует граф G, для которого $K(G)/2^n = \frac{n}{n+1}$. *Подсказка:* используйте коды Хэмминга.

DL 13.6. Докажите, что из любых 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых, а из любых 10 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

DL 12.2. Покажите, что для любой случайной величины X выполнено:

b) $\Pr[X = 0] \leqslant \frac{D[X]}{E[X]^2}$.

DL 12.3. **(Коды Уолша-Адамара)**

a) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки

$a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathtt{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathtt{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $\mathtt{WH}(a)$ и $\mathtt{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

b) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathtt{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

DL 12.4. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\Pr\limits_r[f(x) = C(x,r)] \geqslant \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. Покажите, что:

a) для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\Pr\limits_r[f(x) = C(x,r)] \geqslant 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями;

b) найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

DL 11.3. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ — это глубины всех листьев дерева. Докажите, что:

b) если $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$, то найдётся дерево из n листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

DL 11.4. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Покажите, что:

b) средняя глубина листа не меньше $\log n$.

(Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает его глубину; докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log n$.)

DL 10.3.

b) Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

DL 10.4. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 10.5. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$.

Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DL 9.1. Пусть каждая вершина неориентированного графа имеет степень не больше, чем k. Докажите, что вершины графа можно покрасить

b) в $[k/2] + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

DL 7.1. Вычислите суммы:

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 7.3.

b) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.

c) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n.

d) Покажите, что $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 7.6.

b) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 7.7. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно $\mathbb{R}$.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.6. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \ldots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DL 3.5. **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \ldots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \ldots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 2.2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.