Производящие функции и линейные рекуррентные соотношения. Числа Каталана (ДЗ).

30 апреля 2017 г.

1. Решить с помощью обыкновенных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами:

$$a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = 0.$$

2. Составить рекуррентное соотношение для количества a_n слов длины n над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, не содержащих двух идущих подряд нулей. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

3. Решите с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n, \qquad a_0 = a_1 = 1,$$
$$a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$

4. Установить биекцию между множеством плоских бинарных корневых деревьев, построенных на n вершинах, и множеством правильных скобочных последовательностей длины $2n$, доказав, тем самым, что количество таких деревьев равно числу Каталана C_n.

5. Установить биекцию между всеми триангуляциями выпуклого $(n+2)$-угольника и плоскими корневыми бинарными деревьями, построенными на n вершинах. Изобразить эту биекцию на рисунке для одной из конкретных триангуляций выпуклого шестиугольника.

6. Рассмотрим множество путей, исходящих из точки с координатами $(0,0)$, приходящих в точку с координатами $(n,0)$, состоящих из отрезков $(1,1)$, $(1,-1)$ и $(1,0)$, и нигде не опускающихся ниже оси абсцисс. Такие пути называются путями Моцкина. Вывести рекуррентное соотношение для подсчета количества M_n всех таких путей.

7. Рассмотрим матрицу M_n вида

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Записать для этой матрицы характеристический полином $\phi_n(\lambda)$, получить для $\phi_n(\lambda)$ рекуррентное соотношение второго порядка и решить его с помощью обыкновенных производящих функций. Использовать полученный результат для определения собственных чисел матрицы M_n.