Основные определения теории графов. Пути, циклы.

1. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $diam(G) \geq 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $diam(\bar{G}) \leq 3$.

2. Доказать, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.

3. Пусть G есть граф с обхватом $g(G) \geq 5$ и минимальной степенью вершины $\delta \geq k$. Доказать, что в таком графе по меньшей мере k^2+1 вершин. Для случая $k = 2$ предъявить граф, имеющий в точности $k^2 + 1$ (определения).

4. Рассмотрим последовательность $\mathbf{d_1} := (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$. Удалим в ней число 3, стоящее на первой позиции, а от следущих трех чисел отнимем по единице. В результате получим последовательность $\mathbf{d_2} := (2, 2, 2, 3, 2, 2, 1)$, которая после переупорядочивания по невозрастанию примет вид $(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$. В общем случае соответствующая пара последовательностей будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{lcllllllll} \mathbf{d_1} & := & (s, & d_1, & d_2, & \dots, & d_s, & d_{s+1}, & \dots, & d_n), \\ \mathbf{d_2} & := & & (d_1 - 1, & d_2 - 1, & \dots, & d_s - 1, & d_{s+1}, & \dots, & d_n). \end{array}$$

   Доказать, что последовательность $\mathbf{d_1}$ является графовой тогда и только тогда, когда таковой является и последовательность $\mathbf{d_2}$. Сформулировать на основании данного утверждения алгоритм проверки на графовость для невозрастающей числовой последовательности.

5. Минимальная степень вершины в графе G, построенном на восьми вершинах, равна четырем. Доказать, что любые две вершины в таком графе G либо являются смежными, либо соединены путем длины 2.

6. Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.

7. Граф Петерсена — это простой граф, 10 вершин которого занумерованы всеми возможными двуэлементными подмножествами десятиэлементного множества, а ребра соединяют только те вершины, соответствующие двуэлементные подмножества которых не пересекаются. Исследовать структуру графа Петерсена исходя из этого определения, доказав про этот граф следующие факты:

(a) Граф Петерсена действительно является 3-регулярным графом.

(b) Любые две несмежные вершины в графе Петерсена имеют в точности одну соседнюю с ними вершину.

(c) Обхват графа Петерсена равен пяти.

8. Обычно в любом курятнике петухи пытаются установить некоторый порядок. Делают они это, пытаясь заклевать конкурентов. При этом отношение "заклевать" является асимметричным — в случае, если один из петухов заклевал второго, то второй клевать первого уже, обычно, не пытается. Однако это отношение в общем случае не транзитивно — возможна ситуация, когда первый петух заклевал второго, второй — третьего, а третий — первого. Несмотря на это, некоторую иерархию среди петухов все же установить возможно. Именно, мы будем называть королем курятника любого петуха, который либо заклевал сам других петухов, либо заклевал петухов, которые заклевали тех, кто заклевал его самого. На языке теории графов королю курятника отвечает вершина x в турнире T, расстояние до любой другой вершины y турнира меньше или равно двум. Доказать, что королю курятника (то есть вершине x с $d(x,y) \leq 2$ для любой вершины $y \neq x$) отвечает любая вершина этого турнира с максимальной исходящей степенью.

9. Неубывающая последовательность чисел

$$\mathbf{s_1} := (s_1, s_2, \ldots, s_n) : \qquad s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq n-1 \qquad (1)$$

называется последовательностью количества очков, если существует турнир T, построенный на n вершинах, для которого $outdeg(x_i) = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что невозрастающая последовательность является последовательностью количества очков тогда и только тогда, когда последовательностью количества очков оказывается последовательность $\mathbf{s}_2$, полученная из последовательности

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{s_n}, s_{s_n+1} - 1, \ldots, s_{n-1} - 1)$$

переупорядочиванием ее членов в порядке неубывания.