Функции нескольких переменных и неявные функции

1. (2 балла) Докажите, что если функция $f(x,y)$, где $(x,y) \in E$ непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то эта функция непрерывна по совокупности переменных в области E.

2. (2 балла) Пусть функция $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности. Докажите, что найдется такая последовательность непрерывных на $[0,1]^2$ функций f_n, что $f_n(x,y) \to f(x,y)$ при $n \to \infty$ для любых $x, y \in [0,1]$.

3. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y)$, если $f(0,0) = 0$, а при $x^2 + y^2 > 0$ эта функция задана формулой

$$f(x,y) = \frac{(x^2y^3)^{3/5}}{(x^2 - xy + y^2)^{\alpha}},$$

а) (1 балл) $\alpha = 1$;
б) (1 балл) $\alpha = \frac{1}{2}$.

4. (1 балл) Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = 2, v = 1$, если $x = u + v^2, y = u^2 - v^3, z = 2uv$.

5. (1 балл) Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $xu - yv = 0$, $yu + xv = 1$.

6. (2 балла) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Выписать dz и d^2z.

7. (1 балл) Показать, что для функции

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

выполнено

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

тем не менее

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$$

не существует.

8. (1 балл) Показать, что для функции

$$f(x,y) = (x+y)\sin(x^{-1})\sin(y^{-1})$$

оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ и } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

не существуют, тем не менее существует

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y).$$

Вычислите этот предел.

9. а) (1 балл) Докажите, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a и b — постоянные) удовлетворяет **уравнению теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

б) (1 балл) Докажите, что если функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то функция

$$v(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{-4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{x}{a^4 t}\right), \quad t > 0$$

также удовлетворяет этому уравнению.

10. Вычислить

а) (1 балл) $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, если $u = xyze^{x+y+z}$;

б) (1 балл) $d^n u$, если $u = e^{ax+by+cz}$.