$\boxed{\text{DL 11.}}$ Приведите к КНФ и ДНФ следующие функции:

а) $(x \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge z)$

б) $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$

$\boxed{\text{DL 12.}}$ Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ называется монотонной, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$). Докажите, что:

а) если пропозициональная формула использует только связки $\vee$ и $\wedge$, то задаваемая ей булева функция монотонна;

б) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

$\boxed{\text{DL 13.}}$ Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса $\downarrow$: результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера $\uparrow$: результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.

Определение 0.1. Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу 1, конъюнкцию $\wedge$ и сумму по модулю два $\oplus$ (приоритет $\wedge$ выше, чем $\oplus$). Мономом будем называть константу 1 и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида $m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k$, где m_i — различные мономы, $k \geq 0$. Пример: $x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus 1$.

$\boxed{\text{DL 14.}}$

а) Представьте в виде многочлена Жегалкина $\vee, \wedge$ и $\neg$.

б) Докажите, что любая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина.

в) Докажите, что такое представление единственное с точностью до перестановки мономов.

$\boxed{\text{DL 15.}}$ Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

$\boxed{\text{DL 16.}}$ Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n и их не меньше 2^{n-1}.

$\boxed{\text{DL 17.}}$ Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.