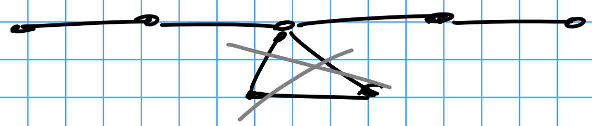
Кратчайшие пути в графах

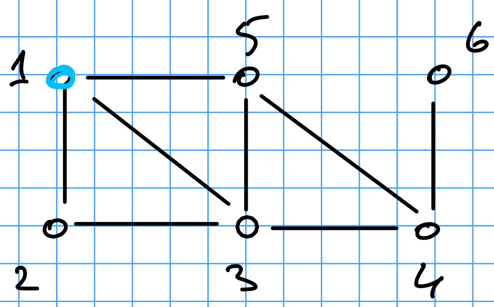
≡ Путь в графе - посл-ть рёбер $e_1 \dots e_n$

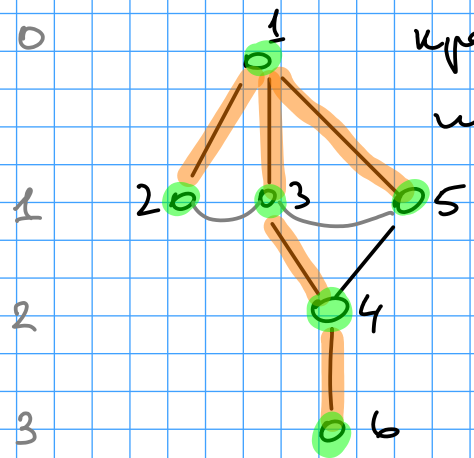
≡ Кратчайший путь - содержит min кол-во рёбер

≡ Простой путь - ∀ вершина встречается ≤ 1 раза

Утв: Кратчайший путь - простой путь

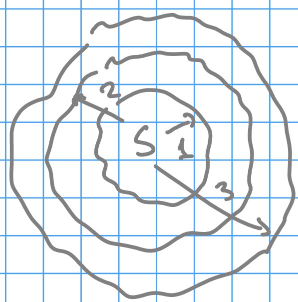






≡ Дерево кратчайших путей

```
BFS(G, s):   // Breadth-first search
    for v ∈ V:
        dist[v] = ∞          ] O(V)
        prev[v] = 0
    dist[s] = 0
    Q ← Queue(s)
    while Q.size() > 0:
        u = Q.dequeue()
        for (u, w) ∈ E:      O(E)
            if dist[w] = ∞
                dist[w] = dist[u] + 1
                prev[w] = u
                Q.enqueue(w)
```



$O(V+E)$

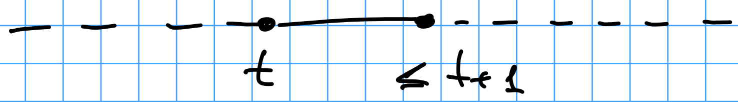
Утв: $\forall v \quad dist[v] = dist(s, v)$

Очевидно: $dist[v] \geq dist(s, v)$

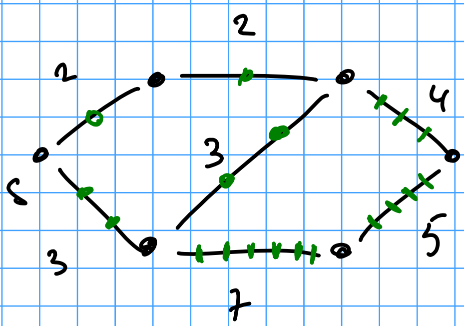
Почему $dist[v] \leq dist(s, v)$?

◁ $\exists \quad dist[v] > dist(s, v)$

$\Rightarrow \exists$ путь длины $dist(s, v)$



Кратчайшие пути во взвешенных графах



Запустим BFS на графе с фикт. верш.

$O((V+E)\underline{\sum w})$

Не работает с вещест. весами

Утв: Любой подотрезок кратчайшего пути — это кратчайший путь.

$\exists \quad s, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, t$ ← кратчайший путь от s до t.

$\forall i, j, \; i \leq j \quad v_i, \ldots, v_j$ — кратчайший путь от v_i до v_j.

▷ Путь — очевидно

Кратчайший?

◁ Если не кратчайший, то его можно заменить на более короткий и тогда мы уменьшим путь от s до t.

противоречие ◁