Энтропия Шеннона.

9 марта 2017 г.

1. Докажите, что энтропия Шеннона не меньше минимальной энтропии, определяемой как $H_{min} = \min_i(-\log p_i)$.

2. Пусть вероятности исходов случайной величины есть $1/2, 1/4, 1/8, ..., 1/2^n, 1/2^n$. К чему стремится ее энтропия, при $n \to \infty$? Тот же вопрос для случайной величины с вероятностями исходов $1/3, 1/3, 1/9, 1/9, ..., 1/3^n, 1/3^n, 1/3^n$.

3. Докажите формулу $h(p_1, \dots p_n, q_1, \dots q_m) = h(p_1 + \dots + p_n, q_1 + \dots + q_m) + (p_1 + \dots + p_n)h(p'_1, \dots p'_n) + (q_1 + \dots + q_m)h(q'_1, \dots q'_m)$ где $p'_i = \frac{p_i}{p_1+\dots p_n}$ и $q'_i = \frac{q_i}{q_1+\dots q_n}$.

4. Покажите, что величина $H(\zeta|A)$ может быть и больше и меньше величины $H(\zeta)$.

5. Докажите, что $I(f(\alpha) : \beta) \leq I(\alpha : \beta)$ для любой функции f.

6. Докажите, что величины α, β, γ независимы в совокупности(вероятность события $(\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_j, \gamma = \gamma_k)$ равна произведению трех отдельных вероятностей) тогда и только тогда, когда

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = H(\alpha) + H(\beta) + H(\gamma).$$

7. Докажите, что $I((\alpha, \beta) : \gamma) \geq I(\alpha : \gamma)$.

8. Докажите, что

$$I((\alpha, \beta) : \gamma) = I(\alpha : \gamma) + I(\beta : \gamma|\alpha).$$

9. Докажите, что если $I(\alpha : \gamma|\beta) = 0$, то $I(\alpha : \gamma) \leq I(\alpha : \beta)$, а значит и $I(\alpha : \gamma) \leq H(\beta)$.

10. Докажите, что $I((\alpha, \beta) : \gamma) \geq I(\alpha : \gamma)$ и что разность между левой и правой частями равна $I(\beta : \gamma|\alpha)$.

11. Докажите неравенство $H(\alpha, \beta, \gamma) \le H(\alpha, \beta) + H(\alpha, \gamma) + H(\beta, \gamma)$

12. Докажите следующее обобщение предыдущего неравенства. Пусть $T_1, ..., T_k$ — произвольные кортежи, составленные из переменных $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, причем каждая переменная входит ровно в r кортежей. Тогда $rH(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \le H(T_1) + H(T_2) + \ldots + H(T_k)$ (неравенство Шерера(Shearer)).