(8) Экспоненциальные и композиционные ф.п.

1. Давайте еще раз вспомним опр-е и комбинаторный смысл пр-я ~~[illegible]~~ экспоненциальных производящих функций.

Было: $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$; было мн. упоряд. мн-в из n эл-тов. Разделение на 2 отрезка: в 1-м: a_i сп., во 2-м — b_{n-i} способами. ⇓ на выходе: 2 мн. упоряд. подмн-ва

1) Э $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$,

$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + b_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$ —

пара экспоненц. произв. ф-ций. Тогда, по опр-ю, произведением этих ф-ций наз. форм. степ. ряд вида

$$H(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \text{ где}$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

; если бы мн. неупоряд. подмн-ва: $\tilde{c}_n = \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \ldots$

∃ 2! способ. мн. упорядочить мн-во из 2-х эл-тов ⇒ $c_n = \tilde{c}_n \cdot 2!$

2) Комбинаторный смысл этой ф-ии: у нас есть n-элтное мн-во (различимых эл-тов!). (Например мн-во сидящих в этой аудитории студентов) Я разделю это мн-во на 2 блока, т.е. разбиваю $[n]$ на два различимых ~~[illegible]~~ подмн-ва (возможно, пустых), таких, что их объединение дает мне все n-мн-во (например, я разбиваю мн-во сидящих здесь студентов на 2 группы, 1-ю отправляю в 433 аудиторию, а 2-ю — в 431 аудиторию, и эти аудитории я различаю).

(этом, они — два 2 эл-та мн-ва: различимы, но мы не упорядочиваем (точнее, 2 мн. упорядоченных подмн-ва: то что они различимы, это и так понятно: они различаются своими эл-тами, пот. в них содержатся)

⇒ мн. упоряд. мн-во различных блоков есть (1-го блока есть 2-го)

Затем я над эл-тами 1-го блока, содержащего i эл-тов, совершаю комбинаторное действие a_i способами, а над эл-тами 2-го блока, содержащего $(n-i)$ эл-тов — некое 2-е комбин. действие b_{n-i} способами. (напр., в 1-м блоке (аудитории) я выбираю одного студента $a_i = i$ способами, чтобы он вышел к доске, а во 2-м блоке (431-й аудитории) — 2-х студентов $\binom{n-i}{2}$ способами с тем, чтобы они пошли в учебное отдел и [illegible]

Тогда: при фиксированном числе i элтов в 1-м блоке: я $\binom{n}{i}$ способами выбираю студентов в 1-ю подгруппу, a_i способами совершаю над ними 1-е комбинаторное действие, а затем над оставшимися студентами 2-й подгруппы — b_{n-i} способами совершаю 2-е комбинаторное действие $\Rightarrow$ всего имею

$$\binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

способов сделать всю вышеописанную послть действий.
Но: т.к. i не фиксировано, т.е. м.б. произвольным, то мне нужно просуммировать это дело по i от 0 до n $\Rightarrow$ получаю коэфт c_n.

---

3) Теперь: понятно, как обобщать все это дело на случай прим K экспоненц. произв. функц. Мне сейчас понадобится частный случай, когда все эти эксп. произв. функи одинаковы и равны $F(x)$. Тогда:

$$H(x) = \left[F(x)\right]^k = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \dots, \text{ где}$$

$$c_n = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n,\\ i_m \geq 0}} \binom{n}{i_1}\cdot\binom{n-i_1}{i_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-i_1-\dots-i_{k-1}}{i_k}\cdot a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_n = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n\\ i_m \geq 0}} \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_k!}\, a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}.$$

Суммирование в ф-ле идет по всем решениям ур-ия $i_1+\dots+i_k=n$ в неотрицат. целых числах с учетом порядка следования слагаемых. (т.е. $1+2+1 \neq 2+1+1$). $\Rightarrow$ мн-во блоков — мн-во упорядоченное

Комбинаторный смысл: я разделю n-мн-во на K блоков — различимых (точнее, мн-во упорядоченных: 1й, 2й, ..., kй), ~~взаимно, каждая из~~ часть из кот. м.б. пустыми, но объединение кот. дает мн-во все n-мн-во. Как я это делаю?

и $\binom{n}{i_1}$ способами отбираю эл-ты в $1^{ый}$ блок, $\binom{n-i_1}{i_2}$ — во $2^{ой}$, ..., $\binom{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}{i_k} = \binom{i_k}{i_k} = 1$ способом — в $k^{ый}$, а затем в каждом блоке совершаю комбинат. действие a_{i_m} способами. Тогда c_n — это общее количество способов совершить такое действие. ⊛

---

2. Теперь: несколько усложним задачу, а именно: предположим, что ~~также~~ количество k блоков, на которые мы разбиваем n-мнво, заранее не фиксируется, т.е. м. б. любым. Как быть в этом случае?

• Ответ, казалось бы, очевиден: нужно взять и просуммировать $[F(x)]^k$ по всем возможным значениям k.

Однако есть 1) тонкости. ~~Следующее~~ 2) Прежде всего: как только k перестает быть ~~фиксированным~~ в сл. правильно не фиксированным, так сразу же мы должны учитывать возможность того, что ~~некоторые из блоков разбиения м. б. пустыми~~ в разбиении могут присутствовать (блоки) пустые. Почему? Потому что при нефиксированном k ~~вариантов разбиения, например, 3-элтного~~ мнва ~~$[1] \oplus [2,3]$ и $[1] \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup [2,3]$~~, мы этих пустых блоков можем навставлять, сколько нам хочется, и колво вариантов разбиения n-мнва сразу станет ∞-ным, у нас исчезает возможность что-либо сосчитать.

---

2) Как обеспечить это формально? ~~(комбинат. т. зрения~~ ~~На самом деле~~, (с комб. т. зрения это значит), достаточно положить $a_0 = 0$, ~~т.е.~~, что мы запре~~тить~~щаем совершать какие-либо комбинат. действия с пустыми мнвами.

С Алгоритмической т. зрения: ~~при $a_0 = 0$ для любых степеней~~ мы считаем сумму

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [F(x)]^k, \quad \cancel{k > n}$$

а затем собираем коэф-ты при $x^n/n!$. Тогда при $a_0 = 0$: как только k станет $> n$, так сразу $F^k(x)$ можно не учитывать: Почему?

Это потому, что $\left[a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots\right]^k =$

$$= x^k \cdot \left[a_1 + a_2 \frac{x}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots\right]^k,$$

и при $k > n$ все эти члены ряда дадут нам степени больше n $\Rightarrow$ их можно не учитывать. Иными словами, для $\forall$ конкретного n нам достаточно ~~...~~ вычислить конечную сумму $\sum_{k=0}^{n} [F(x)]^k = H(x)$, т.е. для нахождения коэф-та C_n совершить конечное число действий.

т.е. когда блоки ~~...~~ у нас линейно упорядочены

3) Теперь: можно все так и оставить. Но, как правило, на практике наиболее интересен случай, когда блоки не упорядочены (причина: он везде одна и та же ⇒ не важно в каком по счету блоке совершать комб. действие; важно лишь, сколько он содержит элементов) ~~различные неразличимы~~. Мы знаем, что $F^k(x)$ – это случай разбиения на k ~~различных~~ блоков ~~(или~~ линейно упорядоч. блоков $\}$ (ящиков). Тогда: мы знаем, что если у нас есть некое k-мн-во различимых э-тов (блоков), то $\exists$ $k!$ способов его линейно упорядочить (если они, конечно, непусты ⇒ все они содержат различные э-ты мн-ва (исходного) ⇒ различаются) (⇒ в случае фиксированного k: ~~есть~~ могут быть пустые блоки ⇒ $\frac{1}{k} F^k(x)$ – писать нельзя!) Как следствие, имеется $F^k(x)/k!$ способов разбить n-мн-во на k непустых линейно неупорядоченных блоков.

Th 1 (Экспоненциальная ф-ла). Пусть a_n – кол-во способов совершить комбинаторное действие над n-элементным мн-вом (т.е. неупорядоченным мн-вом различимых э-тов). Считаем при этом, что $a_0 = 0$. Пусть C_n – это кол-во способов разбить n-мн-во ~~на~~ (т.е. представить как неупорядоченное мн-во непустых попарно непересекающихся подмн-в (блоков), объединение кот. дает все n-мн-во) на заранее не определенное число k блоков, а затем в $\forall$ из этих блоков совершить комбинат. действие a_{i_m} способами, где i_m – кол-во m-го блока ($m \geq 1$). Положим $c_0 = 1$ и обозначим через $F(x)$ и $H(x)$ соответствующие экспоненц. произв. функции для посл-тей a_n и c_n. Тогда:

$$H(x) = e^{F(x)} \overset{def}{=} 1 + \frac{F(x)}{1!} + \frac{F^2(x)}{2!} + \ldots + \frac{F^n(x)}{n!} + \ldots$$

Это и есть знаменитая экспоненц. ф-ла.

---

3. <u>Пример</u>. В яслях находятся n детей. Эти дети разбиваются на группы (непустые, естественно), и в $\forall$ группе устраивают хоровод с. о.: один из детей становится в центр круга, а оставшиеся $(i-1)$ детей образуют хоровод. При этом хоровод может состоять как из нескольких детей, так и из одного ребенка, соединившего руки. <u>Но</u>: при этом в центре $\forall$ хоровода один ребенок стоять обязан. Сколькими способами это можно сделать?

1) Сосчитаем a_i; очевидно, что $a_0 = a_1 = 0$. Далее,

$$a_i = i \cdot (i-2)!\ :$$

я i способами могу выбрать ребенка и поставить его в центр, и $(i-2)!$ способами расставить оставшихся $(i-1)$ детей по кругу. ($(i-1)!$ способов расставить детей; но: i способов неразличимы $\Rightarrow$ ...)

2) Тогда: $F(x) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \ldots = x \cdot \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \right) =$

$= x \cdot \ln \frac{1}{1-x}$, так как:

$$\left(\ln \frac{1}{1-x}\right)' = -\left(\ln(1-x)\right)' = \frac{-1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln \frac{1}{1-x}\, dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

3) Наконец,

$$H(x) = e^{F(x)} = e^{x \ln \frac{1}{1-x}} = e^{\ln \left(\frac{1}{1-x}\right)^x} = \frac{1}{(1-x)^x}$$

4) Получили ответ; он очень милый; но: что с ним делать? Как из него вытащить искомые c_n?

4. Оказывается, делать это легко, причем и в этом и в общем случае.

1) Действительно, возьмем ф-ю $H(x)=e^{F(x)}$ и продифференцируем ее по x:

$$H'(x) = e^{F(x)}\cdot F'(x) = H(x)\cdot F'(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow c_1 + \frac{c_2}{1!}x + \frac{c_3}{2!}x^2+\dots+c_{n+1}\frac{x^n}{n!} = \Big(\underbrace{c_0}_{=1} + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!}+\dots+c_n\frac{x^n}{n!}+\dots\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(a_1 + a_2\frac{x}{1!}+a_3\frac{x^2}{2!}+\dots+a_{n+1}\frac{x^n}{n!}+\dots\Big).$$

2) Но: как перемножать 2 эксп. произв. ф-ии — знаем $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a_{i+1}\cdot c_{n-i} \Longleftrightarrow a_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\, c_{n-i}\binom{n}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} c_i a_{n+1-i} \Longleftrightarrow a_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} c_i a_{n+1-i}$$

5. Давайте сразу же обобщим экспоненц. ф-ю.

1) В экспоненц. ф-ле: мы разбиваем n-элементное мн-во на неупорядоченные непустые блоки, совершаем комбинат. действие a_m способами над этими m-го блока, а сами блоки не трогаем.

2) Если же мы теперь захотим совершить 2е комбинаторное действие над k блоками b_k способами, то: при $\forall$ фиксир. числе k получим

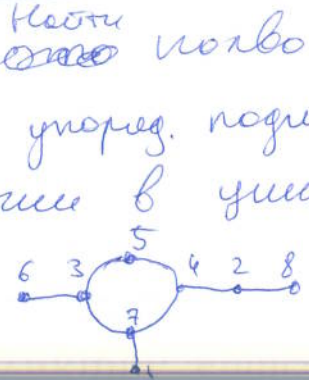
$$\frac{b_k}{k!}F^k(x)$$

способов это сделать. Суммируя по всем k, получим что

$$H(x) = G(F(x)), \text{ где } G(x) = \underbrace{b_0}_{=1} + b_1 x + b_2\frac{x^2}{2!}+\dots+b_n\frac{x^n}{n!}$$

6. Пример Найти кол-во способов разбить n людей в цепочки (мн-во упоряд. подмн-в), а затем расставить эти цепочки в циклическом порядке

Например:



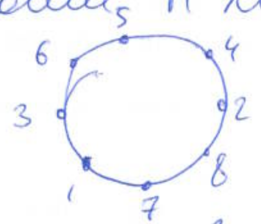
1) Имеется $a_i = i!$ способов расставить i людей в цепочку, и $b_k = (k-1)!$ способов расставить k блоков по кругу $\Rightarrow$ $F(x) = \frac{1}{1-x}$; $G(x) = \ln\frac{1}{1-x} \underline{\underline{+1}}$ (!)

2) Тогда: $H(x) = 1 + \ln\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = 1 + \ln\frac{1-x}{1-2x} = \cancel{1+\ln\frac{1}{1-2x}}$

$= \cancel{\frac{1-x}{1-2x} = \frac{1-2x}{1-2x}} = 1 + \ln(1-x) + \ln\left(\frac{1}{1-2x}\right) = 1 - \ln\frac{1}{1-x} + \ln\frac{1}{1-2x}$

$\Rightarrow c_0 = 1$; $c_n = 2^n \cdot (n-1)! - (n-1)! = (2^n - 1)\cdot(n-1)!$

3) Естественно, т.к. ответ оказался простым, то можно придумать и простое комбинаторное док-во. Именно, расставим n людей в ~~одно~~ круг $(n-1)!$ способами



В $\forall$ из n промежутков между людьми можно проводить или не проводить черту, делящую их на линейные цепочки, но одна обязат. должна быть $\Rightarrow 2^n - 1 \Rightarrow \dots$

7. Замечание. Вообще говоря, мы ~~здесь~~ уже наблюдали 3 разных, но очень важных, частных случая композиционной ф-ии:

1) $b_n = 1$ $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ $\Rightarrow$ это — экспоненциальная ф-ия и $H(x) = e^{F(x)}$

Она означает, что с блоками никаких комбинаторных действий не совершаем.

2) $b_n = n!$ $\forall n = 0, 1, 2 \dots$; это — случай, когда мы блоки линейно упорядочиваем. В этом случае

$$H(x) = 1 + F(x) \cancel{x} + F^2(x) + \dots + F^n(x) = \frac{1}{1-F(x)}$$

3) $b_n = (n-1)!$ $\forall n = 1, 2, 3$; $b_0 = 1$; это — случай, когда мы блоки циклически упорядочиваем:

$$H(x) = 1 + F(x) + \frac{F^2(x)}{} + \frac{F^3(x)}{} + \dots + \frac{F^n(x)}{} + \dots = 1 + \ln\frac{1}{}$$

А так ли это все нужно? На самом деле с пом. этих формул можно решать огромнейшее колво абсолютно нетривиальных и практически очень важных задач.

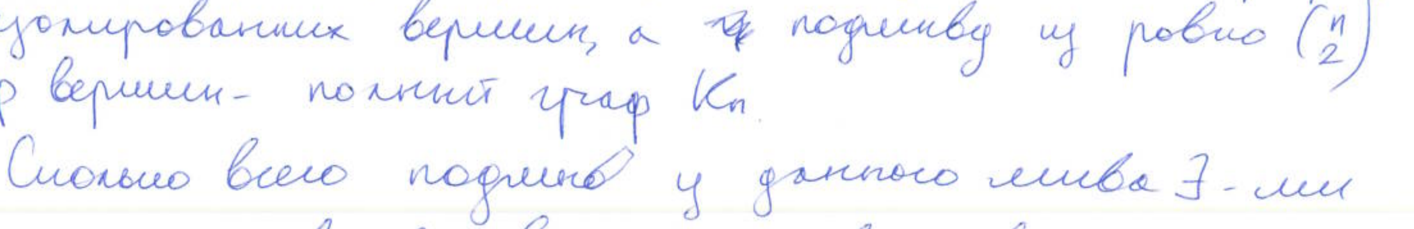
Важный пример № 1 Перечисление всех помеченных графов. (без петель и кратных ребер) на n-элементном мн-ве (различимых) вершин.

1) Что такое помеченный граф? Это мн-во $[n]$ вершин, любая пара которых может быть соединена или не соединена ребром. Сколько всего возможных пар вершин у нас $\exists$? Очевидно, что $\binom{n}{2}$ пар вершин. Тогда $\forall$ граф — это есть некоторое подмн-во этого мн-ва пар вершин. Например, пустому подмн-ву отвечает граф из n изолированных вершин, а ~~т~~ подмн-ву из ровно $\binom{n}{2}$ пар вершин — полный граф K_n.

2) Сколько всего подмн-в у данного мн-ва $\exists$ — мы знаем $\Rightarrow$ колво c_n всех графов ровно

$$c_n = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Например, для $n = 3$ имеем 8 графов:



3) Задача: найти, например, колво всех ~~одно~~связных графов на n вершинах. В примере $a_n = 4$. Более-менее понятно, что: т.к. $\forall$ граф состоит из ~~связных~~ некоторых односвязных компонент, то числа a_n и c_n д.б. как-то связаны. Как?

4) Переформулируем задачу с.о.: $\exists$ имеется n-элементное мн-во — мн-во вершин. Пусть a_n — это колво способов построить на n вершинах односвязный граф. Очевидно тогда, что $\forall$ ~~k-связный~~ граф, состоящий из k односвязных

компонента) получается путем разбиения n-множества $[n]$ на k непустых неупоряд. блоков и построения на $\forall$ m-м из этих блоков размером i_m связного графа. Кол-во способов построить такой односвязный граф $= a_{i_m}$, кол-во способов построить k-связный граф

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n\\ i_m\ge 1}} \frac{n!}{i_1!\dots i_k!}\, a_{i_1}\cdots a_{i_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = c_0 + c_1 x + c_2\frac{x^2}{2!}+\dots+c_n\frac{x^n}{n!}+\dots = e^{F(x)} = e^{\overset{0}{a_0} + a_1 x + a_2\frac{x^2}{2!}+\dots+a_n\frac{x^n}{n!}}$$

5) Теперь: $c_n = 2^{\binom{n}{2}} \Rightarrow a_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, c_{n-i+1}\binom{n}{i}$.

6) Так, $c_0 = 1$; $a_0 = 0$; далее: $a_1 = 1$; $c_1 = 1$ 1

Теперь, $c_2 = 2$, $a_2 = 1$: 1 2. Наконец,

$$\cancel{a_3 = c_3 - \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i} a_{i+1} c_{2-i} = c_3 - 2a_1c_2 - \dots}$$

$$a_3 = c_3 - \sum_{i=1}^{2}\binom{2}{i} c_i\, a_{2+1-i} = c_3 - 2\cdot c_1 a_2 - c_2\cdot a_1 = 8-2-2 = 4$$

---

9. Нам понадобится и еще один важный пример-

Важный пример № 2

1) Мы рассматривали случай, когда у нас $b_n = 1$. А давайте теперь рассмотрим самый простейший, базовый случай, когда $a_0 = 0$, $a_i = 1$ $\forall i = 1, 2, \dots$ Чему он соответствует?

2) Мы берем n-элементное множество, разбиваем его на непустые неупорядоченные блоки - и все, ~~больше~~ ни с ними самими ничего не делаем, ни с элементами в них ничего не делаем. Но: мы с такой задачей уже сталкивались - ~~число~~ число способов сделать это $= B_n$ - числам Белла. Так вот, из общей теоремы сразу же получаются:

а) Производящая функция для чисел Белла:

$$H(x) = B_0 + B_1 x + B_2\frac{x^2}{2!}+\dots = e^{(e^x-1)}$$

δ) Рекуррентное соотношение для чисел Белла:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i a_{n+1-i}$, здесь все $a_i = 1$ $\Rightarrow$ ...

10. Но: помнится, что мы могли решать и более сложную задачу – мы умели определять кол-во разбиений n-элтного мн-ва ровно на k блоков. И это кол-во – это числа $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ Стирлинга 2-го рода.
И это было решение задачи о кол-ве способов раскладки n разных предм. по k неразл. ящикам.
Вопрос: можно ли их получить из этой теории? Из этой же серии: а можем ли мы найти кол-во графов имеющих ровно k компонент связности?

1) Оказывается, что можем, и делать это нужно с.о.: вернемся к композиц. ф-ле, и в кач-ве b_k возьмем t^k, ~~(кол-во способов совершить 2-е комб. действие над k блоками~~ где t – некоторый параметр. Этот выбор означает следующее: мы приписываем $\forall$ разбиению, содержащему ровно k блоков вес (или метку) t^k

2) При этом получим

(менее, по сути, порядок 1-ая)

$$H(x) = 1 + t^1 \frac{F^1(x)}{1!} + t^2 \frac{F^2(x)}{2!} + \ldots + t^k \frac{F^k(x)}{k!} + \ldots = H(x,t) =$$

$$= \underset{1}{\underbrace{C_0}} + C_1(t)x + C_2(t)\frac{x^2}{2!} + \ldots + C_n(t)\frac{x^n}{n!} + \ldots, \text{ где}$$

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, t^k \ ; \ C(0,0) = 1 \ ; \ C(n,0) = 0 \ \forall n > 0$$

3) Очевидно, $C_n(1) = C_n$ – возвращаемся к экспоненц. ф-ле.
в старом ее понимании, это мы

Далее, $C(n,1) = a_n$ – кол-во способов взять n-мн-во и совершить над ним 1-е комб. действие

Тогда комбинаторный смысл $C(n,k)$: это кол-во способов взять n-элтное мн-во, разбить его ровно на k блоков (неупоряд. непустых подмн-в, объединение кот. дает все n-мн-во), с размерами $i_1, \ldots, i_k$, и в $\forall$ m-м блоке размером i_m совершить комбинаторное действие №1 a_{i_m} числом способов. При этом

$$C_n = C_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

(это и есть комбинат. смысл ф-ии $\frac{F^k(x)}{k!}$, стоящей при t^k в разложении $H(x,t)$)

4) Еще раз:

$$H(x,t) = 1 + t^1 \cdot F(x) + t^2 \cdot \frac{F^2(x)}{2!} + \ldots + t^k \cdot \frac{F^k(x)}{k!} + \ldots =:$$

$$=: 1 + t^1 \cdot H_1(x) + t^2 \cdot H_2(x) + \ldots + t^k \cdot H_k(x) + \ldots, \text{ где } H_k(x) = \frac{F^k(x)}{k!}$$

Формально: $H(x,1) = H(x) = 1 + F(x) + \frac{F^2(x)}{2!} + \ldots + \frac{F^k(x)}{k!} + \ldots = e^{F(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow F(x) = \ln H(x)$$

Тогда, очевидно, что $H_k(x) = \frac{F^k(x)}{k!} = \frac{1}{k!}\left[\ln H(x)\right]^k$, т.е выражается через $H(x)$. При этом, так как

$$H_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C(n,k)\frac{x^n}{n!}, \text{ то}$$

мы получаем ф-лу, <u>формально</u> выражающую $C(n,k)$ через C_n

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k}\left[\ln\left(C_0 + C_1 x + C_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + C_n\frac{x^n}{n!} + \ldots\right)\right]^k$$

5) Еще одно формальное равво:

$$H(x,t) = 1 + t^1 \cdot F(x) + t^2 \frac{F^2(x)}{2!} + \ldots + t^k \frac{F^k(x)}{k!} + \ldots = e^{tF(x)} =$$

$$= \left[e^{F(x)}\right]^t = \left[H(x)\right]^t$$

6) Пример Производящая ф-ция для чисел Ст. 2-го рода

$$F(x,t) = e^{t(e^x-1)}$$

Оставить

Задание: получить с ее помощью рекурр. соотнош. для чисел Ст. 2-го рода.

Продолжение