1. Найдите следующие пределы:

$$\text{а)}(0{,}5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x};\qquad \text{б)}(0{,}5)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}(x^2)};$$

$$\text{в)}(0{,}5)\ \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1});\qquad \text{г)}(0{,}5)\ \lim_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x};$$

$$\text{д)}(0{,}5)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2};\qquad \text{е)}(0{,}5)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2};\qquad \text{ё)}(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}.$$

2. Пусть $x\geq 0$. Определим последовательность $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $n\in\mathbb{N}$ (традиционно полагают $x^0=1$ и $0!=1$).

а)(0,5) Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq x_n.$$

б)(0,5) Докажите, что для любых $m,n\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m+n-1}\geq x_n.$$

в)(1) Докажите, что последовательность x_n сходится, и найдите её предел.

3. Вспомните, что для любого $x\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство $\ln(1+x)\leq x$. Пусть $a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

а)(0.5) Докажите, что для любого $x>0$ выполнено неравенство $\ln(1+\frac{1}{x})\geq\frac{1}{x+1}$.

б)(1,5) Докажите, что $a_n=\ln\ln n+o(\ln\ln n), n\to+\infty$.

в)(3) Докажите, что найдется константа $C\in\mathbb{R}$, т.ч. $a_n=\ln\ln n+C+o(1), n\to+\infty$.