1 Домашнее задание

1.1 (1 балл). Дать комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел $P(n,k)$ перестановок без повторений:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1), \qquad n \geqslant 1, \quad k = 1,\ldots,n;$$

$$P(n,0) = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots; \qquad P(n,k) = 0, \quad k > n.$$

1.2 (1.5 балла). Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?

1.3 (1,5 балла). Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?

1.4 (2 балла). Предположим теперь, что в предыдущей задаче мы дополнительно требуем, чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент. Сколько существует способов это сделать?

1.5 (1,5 балла). Сколько существует булевых функций n аргументов?

1.6 (2 балла). Говорят, что булева функция $f(x_1,...,x_n)$ зависит от своего аргумента x_i, если можно подобрать такие значения $\{b_j\}$ для других аргументов, что $f(b_1,...,b_{i-1},0,bi+1,...,b_n) \neq f(b_1,...,b_{i-1},1,bi+1,...,b_n)$. Сколько булевых функций зависят от всех своих n аргументов?

1.7 (1 балл). Доказать формулы обращения

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0.$$

1.8 (2 балла). Найти сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр а) $1,2,3,4$; б) $1,2,2,5$.

1.9 (1,5 балла). Вывести явные формулы для чисел Стирлинга $S(n,3)$ и $S(n,n-2)$.

1.10 (2,5 балла). Дать комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1)\,k^{i-1}, \qquad n \geqslant k.$$

1.11 (1,5 балла). Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Доказать, что

$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

1.12 (2 балла). Доказать, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

1.13 (2,5 балла). Пусть $B_k(n)$ есть количество разбиений, таких, что если числа i и j входят в один и тот же блок, то $|i-j| > k$. Доказать, что $B_k(n) = B(n-k)$ для всех $n \geqslant k$.