# ДЗ 3. Максимизация квадратичных форм

В этот раз было рассмотрено несколько задач минимизации или максимизации. Первая — простая — свелась просто к процессу ортогонализации. А именно, пусть дана матрица $A$ $n \times m$, где $n > m$ и $\operatorname{rk} A = m$, и вектор $b \in K^n$. Мы хотим найти $x \in K^m$, что $Ax$ как можно ближе к $b$. Так как вектор $Ax$ — это произвольный вектор из образа $A$, то задача состоит в том, чтобы спроецировать вектор $b$ на $\operatorname{Im} A$, взять эту проекцию $y = pr_{\operatorname{Im} A} b$ и взять $A^{-1}y$, который однозначно определён ввиду условия на максимальность ранга.

Второй вопрос состоял в том, чтобы найти максимум (или минимум) квадратичной формы $q(x)$ по всем $x$, что $||x|| = 1$. Эта задача возникла у нас при исследовании вопроса про углы между подпространствами.

Прежде всего мы рассмотрели ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$. В нём форма $q(x)$ имеет вид $q(x) = \langle Ax, x\rangle$ для некоторой симметричной матрицы $A$. Теперь нам хочется провести замену координат и упростить матрицу $A$. Однако не стоит забывать про условие $||x|| = 1$. Поэтому мы будем рассматривать только те преобразования, которые сохраняют норму.

**Определение 1.** Пусть $V$ — евклидово пространство. Ортогональным оператором на $V$ называется такой линейный оператор $L\colon V \to V$, что $||Lx|| = ||x||$.

**Замечание.** В определении мы видим равенство двух квадратичных форм, значит равны соответствующие симметрические билинейные формы $\langle Lx, Ly\rangle = \langle x, y\rangle$. Расписав это равенство в ортонормированном базисе получаем $L^\top L = E$.

**Лемма 1.** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис $V$. Линейный оператор, который в базисе $e_i$ имеет матрицу, составленную из столбцов $v_1, \ldots, v_n$, является ортогональным тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормированный базис $K^n$.

Итак, теперь ясно, как можно заменять базис, а что же по поводу симметричности? Какой инвариантный смысл имеет это условие?

Заметим, что задать билинейную форму на $h\colon V \times V \to K$ это тоже самое, что задать линейное отображение $V \to V^*$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис $V$. Тогда есть единственный двойственный базис $e_1^*, \ldots, e_n^*$. Матрица получившегося линейного отображения это в точности матрица билинейной формы $h$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Таким образом, если форма $h$ невырождена, то она даёт изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^*$. Теперь вспомним, что если есть линейное отображение $A\colon V \to U$, то есть сопряжённое линейное отображение $A^*\colon U^* \to$. Причём матрица $A^*$ есть транспонированная матрица $A$ (в двойственных базисах).

Теперь, если $h$ положительно определена, то для $h$ есть ортонормированный базис. Это значит, что матрица $h$ в этом базисе единичная. Пусть $A\colon V \to V$ — оператор. Тогда есть оператор который тоже называют сопряжённым к $A$ и обозначают $A^*\colon V \to V$, заданный как

$$V \xrightarrow{h} V^* \xrightarrow{A^*} V^* \xrightarrow{h^{-1}} V.$$

Это что-то новое. Давайте распишем, что это за оператор такой в терминах $A$ и $h$. Итак возьмём вектор $v \in V$ и отправим его в функционал $h(v, \_)$. Подействуем на таком функционале честным оператором $A^*$ — это будет $h(v, A(\_))$. Теперь надо найти $A^*v$, что $h(A^*v, x) = h(v, Ax)$ для любого $x \in V$.

**Определение 2.** Пусть $A$ — оператор на евклидовом пространстве $V$. Сопряжённым оператором к $A$ называется единственный такой оператор $A^*\colon V \to V$, что $\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in V$.

В ортонормированном базисе его матрица — это $A^\top$. Тогда, если матрица линейного отображения в ортонормированном базисе, равна себе транспонированной, то это значит, что $A = A^*$. Распишем это равенство на языке скалярных произведений.

**Определение 3.** Пусть $V$ — евклидово пространство. Самосопряжённым оператором на $V$ называется такой линейный оператор $A\colon V \to V$, что $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in V$. Это тоже самое, что $A^* = A$.

Эта версия определения самосопряжённого оператора будет для нас основной. Итак, вместо квадратичной формы теперь мы работаем с самосопряжённым оператором, а для оператора, как мы знаем, самое важное — это его собственные числа.

**Теорема 1.** Пусть $A$ самосопряжённый оператор на $V$. Тогда все собственные числа $A$ вещественные, и существует ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$ состоящий из собственных векторов оператора $A$.

Наиболее частое применение этого факта в теории — это диагонализуемость оператора $A$. А ещё теперь мы можем найти максимум и минимум квадратичной формы.

**Теорема 2.** Пусть $A$ — самосопряжённый оператор, и $q(x) = \langle Ax, x \rangle$. Тогда максимум $q(x)$ на сфере $||x|| = 1$ равен $\lambda_{max}$ — максимальному собственному числу оператора $A$. При этом достигается максимум на собственном векторе $v_{max}$. Аналогично минимум достигается на $v_{min}$ и равен $\lambda_{min}$.

Рассмотрим ещё одну геометрическую задачу. Вообще в геометрии фигуры равны, если существует изометрия пространства, переводящая одну в другую. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданную уравнением

$$x^\top Ax + B^\top x + C = 0.$$

Вопрос состоит в том, как бы найти координаты, чтобы вид уравнения был попроще. Однако хочется, чтобы понятие расстояния не менялось.

Прежде всего нам годится преобразование под названием параллельный перенос. Будем считать, что матрица $A$ невырождена. Тогда с помощью параллельного переноса можно добиться, чтобы $B$ стало равно 0.

После этого ортогональным преобразованием сделаем из матрицы $A$ диагональную. В результате получим, что любая гиперповерхность (с невырожденной $A$) в подходящем ортогональном базисе задаётся уравнением

$$\sum \lambda_i x_i^2 = C.$$

Построение системы координат, в которой матрица уравнение гиперповерхности имеет такой вид называется приведением уравнения поверхности к каноническому виду. Если речь идёт только о квадратичной форме, то говорят, что её приводят к главным осям.

## Задачи

Внимание! Квадратичная форма в пункте а) первом задании вырождена, поэтому предлагаю вторую, матрица которой невырождена. Балл за каждую!

**Задача 1.** Приведите поверхность к каноническому виду (то есть найдите подходящую цепочку замен координат).
а) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1 = 0$.
б) $x_1x_4 - x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1 = 0$.

**Задача 2.** Методом наименьших квадратов решить переопределённую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2_2 - 3_3 = 1. \end{cases}$$

**Задача 3.** Постройте матрицу проекции и найдите угол между подпространствами

$$\langle (1,0,0,0), (0,1,0,0,) \rangle \text{ и } \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle.$$

**Определение 4.** Будем говорить, что оператор (не обязательно самосопряжённый) $A \colon V \to V$ положительно определён, неотрицателен, отрицательно определён, если квадратичная форма $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ положительно определена, неотрицательна, отрицательно определена соответственно (то есть принимает положительные значения при $x \neq 0$, положительные и, возможно, 0, только отрицательные значения).

**Задача 4.** Докажите, что операторы $AA^*$ и $A^*A$ неотрицательны, самосопряжены и имеют одинаковые собственные числа.

**Задача 5.** Пусть есть самосопряжённые операторы $A_1, \dots, A_n$, такие, что $A_iA_j = A_jA_i$. Покажите, что существует ортонормированный базис в котором эти операторы диагонализуются (вспомните прошлый семестр).