ДЗ на 27 ноября

1) Пусть M — произвольное множество, $M*$ — пространство функций на M со значениями в поле K (с поточечно заданными сложением функций и умножением на скаляр). Постройте какой-нибудь адекватный изоморфизм между $(M_1 \times M_2)*$ и $M_1 * \otimes M_2*$ ну и докажите, что это изоморфизм.

2) Докажите, что ранг тензора в тензорной степени пространства $U < V$ такой же, как если его рассматривать в объемлющем пространстве V. б) Докажите, что если $u_1, \ldots, u_n$ линейно независимы, то ранг $\sum_{i=1}^n u_i \otimes u_i \otimes u_i$ равен n

3) Пусть U — n-мерное векторное пространство над полем K. Вычислите явно композицию трех отображений: отождествления кольца матриц $M_n(K)$ и $Hom(U, U)$, отождествления $Hom(U, U)$ и $U \bigotimes U*$ (то, что мы обсуждали на паре — тензору $v \otimes f$ сопоставляем оператор A такой, что $A(u) = f(u)v$) и свёртки $U \bigotimes U* \to K$.

4) Пусть $K = \mathbb{C}$, хоть это и неважно. Выразите $det(A \bigotimes B)$ через $det(A), det(B)$, где A, B — линейные операторы на пространстве V.

5) Расставьте тензоры в вершинах графа (тензор должен зависеть только от степени вершины) так, чтобы полная свёртка этих тензоров равнялась (относительно стандартной билинейной формы) равнялась количеству правильных рёберных раскрасок графа в k цветов (правильность, как обычно, означает, что рёбра с общим концом покрашены в разные цвета).